P-6

分割ゲームにおける Grundy 数の周期性
Periodicity of Grundy numbers in division games

○大村侑義 [1]
Yukinori Omura

Abstract: In this paper , we briefly discuss winning strategy and the Grundy number in stone-picking games. It also describes the periodicity of the Grundy numbers in division games.

1. はじめに

石取りゲームとは二人遊びのゲームで両者交互に取っていくゲームである. 石取りゲームの見本ともいうべきゲームに,「二ム」というゲームがある.「二ム」とは石を何個かずついくつかの山にまとめておいて, 二人で交互にどれか 1 つの山から好きな個数だけ石をとっていく. 最後の石を取った方が勝ちというゲームである. ゲームの中で「最後にとった方の勝ち」という規則を **正規形** といい、「最後にとった方が負け」という規則を **逆形** と呼ぶことにする. あるゲームの「必勝法」, とか「先手必勝」,「後手必勝」とかいう言葉をよく使うため, これらの述語を簡単に述べる. **先手必勝** とは, 先手がまずある手を打ち, 以後後手の打つ各手に応じて, いつも先手がうまく手を工夫すれば, 最後に先手が勝つような戦略がある, ということ言っている. 同様に **後手必勝** とは, 先手がどのような手を打っても, 各手に応じて, いつでも後手がうまく手を工夫すれば, 最後に後手が勝つような戦略があるということである. また, 後手必勝の形を**良形**と呼ぶことにする. 先手必勝の形は**良形でない**とする.

2. ゲームの演算と二ムの必勝判定

n 山崩し (二ム) の必勝法を求めるために, まずは三山崩しの場合で考える.
l , m , $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ とする.
$(0\ ,\ 0\ ,\ 0)$ は後手必勝である.
$(l\ ,\ 0\ ,\ 0)$ は $(l\ ,\ 0\ ,\ 0) \rightarrow (0\ ,\ 0\ ,\ 0)$ とすればよいので先手必勝である.
$(l\ ,\ m\ ,\ 0)\ (l < m)$ は $(l\ ,\ m\ ,\ 0) \rightarrow (l\ ,\ l\ ,\ 0)$ とすればよい.

定理 1. $\forall\, m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して, $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ がただ 1 つ存在し, $(l\ ,\ m\ ,\ n)$ は良形. この l は m と n とで定まるので

$$l = m * n$$

と書くことにする.

補題 2. 演算 $*$ について, 次の性質が成り立つ.

$$(i)\ m * n = n * m$$
$$(ii)\ m * 0 = 0 * m = m$$
$$(iii)\ l * (m * n) = (l * m) * n$$

定理 3. $k, l \in \mathbb{N}$ に対して,$k \neq l$ ならば,$2^k * 2^l = 2^k + 2^l$ である. $k = l$ ならば,$2^k * 2^l = 0$ である.

m と n をそれぞれ二進法で表現すると $m = m_q 2^q + m_{q-1} 2^{q-1} + \cdots + m_1 2 + m_0$, $n = n_q 2^q + n_{q-1} 2^{q-1} + \cdots + n_1 2 + n_0$ と表せる. 補題 2 から $*$ の順序は変えてもよいので $m * n$ も二進法による表現により,$m * n = (m_q * n_q) 2^q * (m_{q-1} * n_{q-1}) 2^{q-1} * \cdots * (m_1 * n_1) 2 * (m_0 * n_0)$ と表せる.$m * n$ の二進法による表現と定理 3 から $*$ による演算は **mod 2 の加法**といえる. 定理 1 で注意したように,(l, m, n) が良形であるような l は m, n から一意的に定まり, このような l を加法に似た性質を持つので $m \overset{*}{+} n$ と記し,m, n の**二ム和**と呼ぶこととする. ここから三山崩しを一般化し, n 山崩し (二ム) の場合に拡張してみる.

定理 4. $m_1, m_2, \cdots, m_n \in \mathbb{N}$ に対して, $m_1 \overset{*}{+} m_2 \overset{*}{+} \cdots \overset{*}{+} m_n = s$ とおく.$s \neq 0$ ならば $\exists\, i \in \mathbb{N}\ s.t.$

$$s \overset{*}{+} m_i = m_i' < m_i$$

定義 5. [1] 二人で交互に着手する
[2] 各形に対して変形してえられる有限個の形が定められていて, その形のどれか 1 つを選ぶ.
[2′] 有限回の手順で必ず勝敗が決まる (有限性)
[3] 変形できない形になったとき, その形を作った方の勝ち.
[4]$(m_1, \cdots, m_n)$ のうち m_i にのみ着手し,
$(m_1, \cdots, m_{i-1}, b_1, \cdots, b_p, m_{i+1}, \cdots, m_n)$ という形にする. ただし

$$m_i \geq b_1 + \cdots + b_p\ ;\ b_j < m_i (j = 1, \cdots, p)$$

をみたす

上の [1], [2], [3], [4] の特徴を合わせ持つゲームを G **型のゲーム**という. 上の式で $p \leq 2$ としたものを K **型のゲーム**という.

$N(P)$ は $\forall\, P \in \mathcal{P}$ に対し, P から一手で移行できる局面の集合とする.

1: 日大理工・院 (前)・数学

補題 6. (必勝判定の基本原理)
局面の集合 $\mathcal{P}$ を直和 $\mathcal{P}=\mathcal{S}\cup\mathcal{G}$ $(\mathcal{S}\cap\mathcal{G}=\emptyset)$ に分解とする. ただし $\varepsilon=\{P\in\mathcal{P}\mid N(P)=\emptyset\}$ とし, 局面 P から局面 P' へ一手で移れることを 記号で $P\to P'$ と表しているとすると,
(i) $\varepsilon\subset\mathcal{G}$
(ii) $P\in\mathcal{S}$ ならば $P\to P'$ とすると $P'\in\mathcal{G}$ が存在する
(iii) $P\in\mathcal{G}$ ならば $P\to P'$ とすると, 常に $P'\in\mathcal{S}$
このとき, $\mathcal{G}$ は良形の全体, $\mathcal{S}$ は良形でない全体と一致する.

定理 7. 石の山が $(m_1\,,m_2\,,\cdots,m_n)$ のとき

$$m_1\overset{*}{+}m_2\overset{*}{+}\cdots\overset{*}{+}m_n=0\iff\text{良形}$$
$$m_1\overset{*}{+}m_2\overset{*}{+}\cdots\overset{*}{+}m_n\neq 0\iff\text{良形でない}$$

をみたす

3. Grundy 数

定義 8. (Grundy 数)
局面の集合 $\mathcal{P}$ と $\mathcal{R}$(ルール) からなる $\mathcal{A}=(\mathcal{P},\mathcal{R})$ を G 型のゲームとする.
$\mathcal{A}$ の $\forall P\in\mathcal{P}$ に対して, その Grundy 数 $g_{\mathcal{A}}(P)$ を次のように定義する. どのゲームを考えているかがあきらかなときは $g_{\mathcal{A}}(P)=g(P)$ と略記する.
(i) $0\in\varepsilon$ については $g(0)=0$
(ii) $P\notin\varepsilon$ のとき, P から一手で移行できる形 $m_1,\cdots,m_n$ をえられたとする. 可能な全ての形 $m_1,\cdots,m_n$ に対して

$$g(m_1)\overset{*}{+}\cdots\overset{*}{+}g(m_n)$$

を作り, その値の数全体のなす集合を $g(N(P)):=\{g(P')\mid P'\in N(P)\}$ と考えると, $g(P)$ は

$$g(P)=mex(g(N(P)))=min\{\mathbb{N}\cup\{0\}-g(N(P))\}$$

と定める

定理 9. $\mathcal{P}$ を

$$\mathcal{S}=\{P\in\mathcal{P}\mid g(P)\neq 0\}$$
$$\mathcal{G}=\{P\in\mathcal{P}\mid g(P)=0\}$$

の二つに分けると, $\mathcal{S}$ は良形でない全体であり, $\mathcal{G}$ は良形の全体である.

注意 10. このゲームの研究は, $g(0),g(1),g(2)\cdots$ という **Grundy 数列**を決定することが目標である.Grundy 数列の途中から繰り返しが起こるとき, **周期的**であるなどといい, くり返し部分の長さを**周期**という.

定義 11. (加法的周期性)
Grundy 数 $g(n)(n=0,1,2,\cdots)$ は, ある $n_0\geq 0,p,q>0$ があって $n\geq n_0$ ならば

$$g(n+p)=g(n)+q$$

をみたすとき, **周期** p, **増分** q の**加法周期性**をもつという.Grundy 数列を循環小数のように記し, あとに $(+q)$ と書いて表すことにする. たとえば二ム Grundy 数の列 $0123\cdots$ は $\dot{0}(+1)$ と表すことができる.

4. 分割ゲーム

定義 12. (分割ゲーム)
山から石をいっさい取らず, $m_1,\cdots,m_n$ に分割し, ただ列の間を切るだけのゲームを, **分割ゲーム**と呼ぶ.

定義 13. (不等分割ゲーム)
n 個からなる石の山を, $m_1,\cdots,m_n$ に分割し, $\forall i\,,j\in\mathbb{N}$ に対して

$$m_i\neq m_j\ (i\neq j)$$

とする. ただし, すでに別の a 個からなる石の山があるとき, $\forall m_i\in\mathbb{N}\,(i=1,\cdots,n)$ に対して, $a=m_i$ となることにさしつかえないとする. このゲームの Grundy 数の列は周期 1, 増分 1 の加法的周期性を示し,

$$000102340\dot{5}(+1)$$

となる.

例 14.

	$(0,0)$	$(1,0)$	$(0,1)$	$(1,1)$
(0,0,0)	2	34	2	−
(1,0,0)	−	−	2	−
(0,1,0)	2	−	2	60
(1,1,0)	4	−	2	10
(0,0,1)	2	−	−	−
(1,0,1)	−	−	7	−
(0,1,1)	2	−	−	−
(1,1,1)	−	8	−	−

上の表は 2 つの山に分割する分割ゲームの Grundy 数の周期性を考えている. 縦の欄は (石の個数の差が 0, 石の個数の差が 1, 石の個数の差が 2), 横の欄は (石の個数が 1, 石の個数が 2) である. それぞれの (　) 内の条件を許すならば 0, 許さないならば 1 を記している.– は Grundy 数列を 1000 まで調べたときに周期性が見つからなかったことを表している.

5. 参考文献

[1] 一松信. 石取りゲームの数理. 森北出版, 2003

[2] 佐藤文広. 石取りゲームの数学. ゲームと代数の不思議な関係. 数学書房, 2014