P-7

結び目群の表示
Presentations of Knot Groups

○多保祐花 [1] , 橋口徳一 [2]
*Yuka Tabo [1], Norikazu Hashiguchi [2]

Abstract: We consider the knot group of any polygonal knot K in regular position. We describe two presentations of the knot group of K, which are called the over and the under presentations. The classical Wirtinger presentation is obtained as a special case of the over presentation.

1. 結び目の定義と準備

定義 1. K が**結び目**であるとは，K が円周 C の 3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ の中への同相写像の像となることをいう．通常，結び目 K を射影で表す． $\mathcal{P}(x,y,z)=(x,y,0)$ によって定義される平行射影 $\mathcal{P}:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$ を考える．このとき，像 $\mathcal{P}(K)$ の点 p の逆像 $\mathcal{P}^{-1}(p)$ が K の点を 2 点以上含むならば，p を**多重点**であるという．

定義 2. 有限個の線分の和集合である結び目を多辺形結び目という．また，多辺形結び目が**正則な位置にある**とは，次の 2 つを満たすときをいう ：
(i) K の多重点は二重点のみであり，かつそれらは高々有限個である．
(ii) K の頂点の像は，二重点にはならない．

定義 3. 正則な位置にある多辺形結び目の射影像上の二重点は，結び目の二点の像である．z 座標が大きい方の点を**上交叉点**，他方をそれに対応する**下交叉点**という．

定義 4. 結び目群の表示は，K と $\mathbb{R}^3$ に**向き**を定めて決める．結び目の二つの向きのうち一つを正に選び，K の上の矢印で表す．$\mathbb{R}^3$ では常に左手ねじの向きを正とする．
　また，二つの基点 $p_0, p_0^{'}$ を，p_0 は結び目の上方に，$p_0^{'}$ は下方に選ぶ．

定義 5. 位相空間 X の**同位な変形** とは，X の自身の上への同相写像 h_t $(0\leq t\leq 1)$ の族で，h_0 が恒等写像となるもの，すなわち，X のすべての点 $p\in X$ に対して $h_0(p)=p$ であり，また，$H(t,p)=h_t(p)$ によって定義される関数 H は，t と p について連続である．$h_1(K_1)=K_2$ となるような，$\mathbb{R}^3$ の同位な変形 $\{h_t\}$ が存在するとき，結び目 K_1 と K_2 は同じ**同位型に属する**という．結び目 K_1 と K_2 が同じ同位型に属するならば，それらは同値である．

2. 上方表示と下方表示

定義 6. K : 結び目，$p_0\in\mathbb{R}^3-K$ とする．基本群 $\pi(\mathbb{R}^3-K,p_0)$ を，**結び目 K の群**とよぶ．

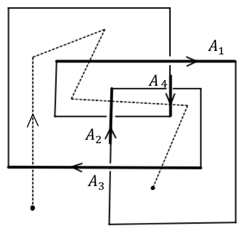
　K を多辺形結び目（正則な位置）としたとき，ある正の整数 n について，上交叉点でも下交叉点でもないような，K の $2n$ 個の点を次のように選び，集合 Q とする：

(i) K は Q の点で，n 個の上道と n 個の下道という 2 種類の折れ線に分かれる．
(ii) 上道は下道を，下道は上道を含まない．
(iii) K をある方向に一回りするとき，Q の点を通過するごとに上道と下道が交互に現れる．K は Q の点によって，n 個の**上道**と n 個の**下道**に分かれる．

　上道を $A_1,A_2,\ldots,A_n$ で表し，それらの和を A で，下道を $B_1,B_2,\ldots,B_n$ で表し，それらの和を B で表す．
　$F(\mathbf{x})$ を $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)$ で生成された自由群とし，$\mathbb{R}^2-\mathcal{P}(B)$ の単純な道 a に対して，$F(\mathbf{x})$ の１つの元

$$a^{\#}=x_{i_1}^{\epsilon_1}\cdots x_{i_l}^{\epsilon_l}$$

を対応させる．ただし，a は射影された上道と順次に $\mathcal{P}(A_{i_1}),\ldots,\mathcal{P}(A_{i_l})$ で交差し，右手系か左手系かで，ϵ_{i_k} が $+1$, か -1 かが定まる．（下図はその例.）



$$a^{\#}=x_3x_1x_2x_4^{-1}x_3^{-1}$$

　$\mathbb{R}^2$ の任意の点 p に対して，p_0 から $\mathbb{R}^2$ に平行に直線的に p の真上まで来て，そこから p まで垂直に下る道を $\bar{p}$ で表す．また，$\bar{p}$ を逆にたどる道を $\bar{p}^{-1}$ で表す．$\mathbb{R}^2$ の道 $a:[0,||a||]\longrightarrow\mathbb{R}^2$ に対して，

$${}^{*}a=\overline{a(0)}\cdot a\cdot\overline{a(||a||)}^{-1}$$

とおき，自由群 $F(\mathbf{x})$ から上方表示をつくる．

定義 7. 準同型写像 $\phi:F(\mathbf{x})\longrightarrow\pi(\mathbb{R}^3-K,p_0)$ を次のように定義する．
a_j を $a_j^{\#}=x_j$ $(j=1,\ldots,n)$ となるような $\mathbb{R}^2-\mathcal{P}(B)$ の単純な道とし，

$$\phi(x_j)=[{}^{*}a_j]\ (j=1,\ldots,n)$$

とする．($\phi(x_j)$ は代表の道 a_j のとり方によらない．)

　生成元 $x_1,\ldots,x_n$ からの対応を，群 $F(\mathbf{x})$ 全体からの対応に拡張した準同型写像 ϕ が唯一つ定まる：
$\mathbb{R}^2-\mathcal{P}(B)$ の任意の単純な道 a に対しては，

$$\phi(a^{\#})=[{}^{*}a]$$

1: 院 (前)・数学, 2: 日大理工・教員・数学

となる．

次に，$F(\mathbf{y})$ を $\mathbf{y}=(y_1,\ldots,y_n)$ で生成された自由群とし，$\mathbb{R}^2-\mathcal{P}(A)$ の単純な道 b に対して，

$$b^\flat = y_{j_1}^{\delta_1}\cdots y_{j_m}^{\delta_m}$$

を定義し，$F(\mathbf{y})$ の元 $b^\flat$ を対応させる．ただし，ここで射影された下道は $\mathcal{P}(B_{j_1}),\ldots,\mathcal{P}(B_{j_m})$ の順に，道 b と交叉し，b が B_{j_k} の上を左から右へ横切るか否かで δ_k が $+1$, か -1 かが定まる．つまり，左手系で $+1$，右手系で -1 である．$\phi':F(\mathbf{y})\longrightarrow\pi(\mathbb{R}^3-K,p_0')$ も同様に定義する．

反射 $\mathcal{R}$ を，$\mathcal{R}(x,y,z)=(x,y,-z)$ とし，a を $\mathbb{R}^2$ の任意の道とする．基点 p_0，p_0' は $p_0'=\mathcal{R}(p_0)$ を満たすようにとる．

$${}_*a=\mathcal{R}({}^*a)=\mathcal{R}(\overline{a(0)}\cdot a\cdot\overline{a(\|a\|)}^{-1})$$

とおく．

定義 8. 準同型写像 $\phi':F(\mathbf{y})\longrightarrow\pi(\mathbb{R}^3-K,p_0')$ を次のように定義する．
b_i を $b_i^\flat=y_i$ $(i=1,\ldots,n)$ となるような $\mathbb{R}^2-\mathcal{P}(A)$ の単純な道とし，

$$\phi'(y_i)=[{}_*b_i]\ (i=1,\ldots,n)$$

とする．

下道の像 $\mathcal{P}(B_i)$ $(i=1,\ldots,n)$ は互いに素な折れ線となる．したがって，互いに素な単連結な $\mathcal{P}(B_i)\subset V_i$ $(i=1,\ldots,n)$ を満たす開集合 $V_1,\ldots,V_n$ が存在する．点 q_0 はすべての領域 V_i $(i=1,\ldots,n)$ の閉包の外部にあるようにとれる．(V_i の境界は, 時計の針と反対方向に V_i の周囲をまわる単純な閉じた道 $v_1,\ldots,v_n$ の素な像.) 同様に，単連結で互いに素な $\mathbb{R}^2$ の開集合 $\mathcal{P}(A_i)\subset U_i$ $(i=1,\ldots,n)$ で，その境界が $U_1,\ldots,U_n$ の周囲を時計方向に回る単純な閉じた道 $u_1,\ldots,u_n$ の像であるように選ぶ.

次に，単純な道 $c_i:[0,||c_i||]\longrightarrow\mathbb{R}^2$ $(i=1,\ldots,n)$ を，始点は q_0，終点は $v_i(0)$ で，$t=||c_i||$ 以外のところでは $c_i(t)\in\mathbb{R}^2-\bigcup_{k=1}^{n}\overline{V}_k$ となるように選ぶ．(ただし $\overline{V}$ は V_k の閉包.) 同様にして，単純な道 $d_j:[0,||d_j||]\longrightarrow\mathbb{R}^2$ $(j=1,\ldots,n)$ を $d_j(0)=q_0$，$d_j(||d_j||)=u_j(0)$ で，$t=||d_j||$ 以外は，$d_j(t)\in\mathbb{R}^2-\bigcup_{k=1}^{n}\overline{U}_k$ となるように選ぶ.

定理 9. $\pi(\mathbb{R}^3-K,p_0)$ の上方表示は,

$$(x_1,\ldots,x_n:r_1,\ldots,r_n)_\phi,\ r_i=(c_i\cdot v_i\cdot c_i^{-1})^\#,\quad (i=1,\ldots,n)$$

$\pi(\mathbb{R}^3-K,p_0')$ の下方表示は,

$$(y_1,\ldots,y_n:s_1,\ldots,s_n)_\phi',\ s_j=(d_j\cdot u_j\cdot d_j^{-1})^\flat,\quad (j=1,\ldots,n)$$

3. Wirtinger 表示

上方表示 に **Tietze の演算**を n 回適用し，$\pi(\mathbb{R}^3-K,p_0)$ の表示

$$(x_1,\ldots,x_n:{v_1}^\#,\ldots,{v_n}^\#)_\phi$$

が得られる．この表示を，**Wirtinger 表示**という．

以下，p_0 を省略して，$\pi(\mathbb{R}^3-K,p_0)$ を $\pi(\mathbb{R}^3-K)$ と表す.

4. 例

（例） 自明な結び目
表示は，$\pi(\mathbb{R}^3-K)=|x:\ |$ であり，自明な結び目の群は，無限巡回群．この結び目群と同型な結び目群をもつ結び目を，**ほどける結び目**という．

（例） クローバー結び目
生成元 x,y,z は，$x={a_1}^\#,y={a_2}^\#,z={a_3}^\#$ のように選ぶ．すると，${v_1}^\#,{v_2}^\#,{v_3}^\#$ は,

$${v_1}^\#=x^{-1}yzy^{-1},{v_2}^\#=y^{-1}zxz^{-1},{v_3}^\#=z^{-1}xyx^{-1}$$

となる．Wirtinger 表示は，${v_3}^\#$ を除いて,

$$(x,y,z:x^{-1}yzy^{-1},y^{-1}zxz^{-1})$$

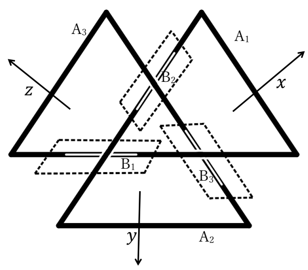
となり，関係式は,

$$\pi(\mathbb{R}^3-K)=|x,y,z:x=yzy^{-1},y=zxz^{-1},z=xyx^{-1}|.$$

$z=xyx^{-1}$ を他式に代入し式を整理すると，クローバー結び目の群 $\pi(\mathbb{R}^3-K)$ の表示

$$(x,y:xyx=yxy)$$

が得られる．



5. ほどけない結び目型の存在

自明な結び目の群が可換群であるのに対し，非可換な群である 3 次対称群と準同型定理を使って，クローバー結び目の群が非可換な群であることを示す.

まず，巡回置換 $(1\,2)$ と $(2\,3)$ により生成される 3 次の対称群 S_3 は，$(1\,2)(2\,3)=(1\,2\,3)\neq(1\,3\,2)=(2\,3)(1\,2)$ より，可換群ではない．クローバー結び目の上方表示は，x と y が自由基となっている自由群 F から結び目群の上への準同型写像 ϕ から成り立ち，ϕ の核は $xyx(yxy)^{-1}$ の帰結群となる．$\theta(x)=(1\,2)$, $\theta(y)=(2\,3)$ で定義された準同型写像 $\theta:F\longrightarrow S_3$ は，$\theta(xyx)=\theta(yxy)$ であれば，結び目群から S_3 の上への準同型写像を誘導する．ここで,

$$\theta(xyx)=\theta(x)\theta(y)\theta(x)=(1\,2)(2\,3)(1\,2)=(1\,3)$$
$$\theta(yxy)=\theta(y)\theta(x)\theta(y)=(2\,3)(1\,2)(2\,3)=(1\,3)$$

より，クローバー結び目の群は，準同型写像で，非可換な群の上に写される．よって，無限巡回群ではないので，自明な結び目群と同型ではない.

6. 参考文献

[1] Richard H. Crowell and Ralph H. Fox, *Introduction to Knot theory*, Ginn and company, 1963.

[2] R.H. クロウェル R.H. フォックス，「結び目理論入門」, 岩波書店, 1967.