P-8

非平衡時の 1 次元 Gizburg-Landau モデルの揺動
Fluctuations of One Dimensional Ginzburg-Landau Models in Nonequilibrium

○伊東飛紀
*Ito Asuki

Abstract: In this paper, we outline that the non-equilibrium fluctuations of one dimensional Ginzaburg-Landau model are governed by the Ornstein-Uhlenbeck process.

1. はじめに

微視的な現象を記述する系から, 時空に対するスケール変換とその極限をとることによって巨視的な系が導かれることを流体力学極限といい, 巨視的な系は, 多くの場合決定論的な偏微分方程式により記述される. 流体力学極限は, 確率論的には大数の法則として捉えることができ, 自然と関連した問題として, 中心極限定理に相当することが提起される. 中心極限定理は, 系が平衡状態のときに平衡揺動, そうでないときには非平衡揺動と呼ばれる. 本稿では, 1 次元周期格子上の Ginzaburg-Landau モデルの非平衡揺動 ([1]) について概説する.

2. 設定

区間 $[0,1]$ で 0 と 1 を同一視した 1 次元単位トーラスを S とする. 自然数 N に対して, 時刻 t での S 内の地点 i/N における連続的スピンを $x_i(t)$ とする. このとき, $x(t)=(x_1(t),x_2(t),\dots,x_N(t))$ は, 時刻 t での各格子点における S 上の場を表す. ただし, x のダイナミクスは, 独立な Brown 運動 $B_i(t)$ について, 確率微分方程式 (SDE)

$$dx_i(t) = \frac{1}{2}N^2\Delta(\phi'_\cdot(x))_i\,dt + N(dB_i(t)-dB_{i+1}(t))$$

によって与える. ここで, Δ は離散ラプラシアンすなわち,

$$\Delta x_i = x_{i+1}-2x_i+x_{i-1}$$

である. また, 関数 $\phi\in C^1(\mathbb{R})$ はポテンシャルと呼ばれ,

$$\int_{\mathbb{R}}\exp(-\phi(x))\,dx = 1$$

$$\int \exp(\lambda x-\phi(x))\,dx = M(\lambda)<\infty \quad \forall\lambda\in\mathbb{R}$$

を満たすと仮定する. このような ϕ に対しては, $\mathbb{R}^N$ 上の密度関数

$$\Phi_N(dx)=\prod_{i=1}^N \exp(-\phi(x_i))\,dx_i$$

が定義できる. なお, この Markov 過程の生成作用素は,

$$L_N = \frac{N^2}{2}\left(\sum_{i=1}^N\left(\frac{\partial}{\partial x_i}-\frac{\partial}{\partial x_{i+1}}\right)^2 - (\phi'(x_i)-\phi'(x_{i+1}))\left(\frac{\partial}{\partial x_i}-\frac{\partial}{\partial x_{i+1}}\right)\right)$$

と表される. さらに, L_N は Φ_N について可逆となる. この系は, 1 次元 Gizburg-Landau モデルを呼ばれる.

$x(0)$ の初期分布が Φ_N に関する密度関数 $f_N^0(x)$ をもつと仮定すると, その後の時刻 $t>0$ における密度関数 $f_N^t(x)$ は, 前進方程式

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial t}f_N^t = L_N f_N^t, & t>0\\ f_N^t|_{t=0}=f_N^0\end{cases}$$

を満たす.

3. 流体力学極限

[2] において, 1 次元 Ginzburg-Landau モデルに対する流体力学極限の問題が解決された. その中で, 以下で定める相対エントロピー H_N が本質的な役割を果たしている.

$$H_N(f)=\int f\log f\Phi_N dx$$

初期分布について以下を仮定する.

(A1) 関数 $m_0(\theta)$ が存在して, $\forall J\in C^\infty(S)$ に対して,

$$\lim_{N\to\infty}\int_{E_N} f_N^0(x)\Phi_N\,dx = 0$$

$$E_N^0 = \left\{x;\left|\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N J\left(\frac{j}{N}\right)x_j - \int J(\theta)m(0,\theta)\,d\theta\right|\geq\delta\right\}$$

が成り立つことを仮定する.

(A2) 初期分布におけるエントロピーに関して

$$H_N(f_N^0)\leq CN,\quad (C>0)$$

を満たす.

日大理工・院 (前)・数学

定理 1 ([2] Thorem 1.1) 初期分布に関する仮定 (A1), (A2) の下で，後の時刻 $t > 0$ で $\forall J \in C^\infty(S)$ に対して，

$$\lim_{N\to\infty} \int_{E_N^t} f_N^t(x)\Phi_N\, dx = 0$$

$$E_N^t = \left\{ x; \left| \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} J\left(\frac{j}{N}\right) x_j - \int J(\theta) m(t,\theta)\, d\theta \right| \geq \delta \right\}$$

が成り立つ. ただし, $m(t,\theta)$ は, 非線形拡散方程式

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} h'(m(t,\theta)), \quad t > 0, \theta \in S$$
$$m(t,\theta)|_{t=0} = m_0(\theta)$$

の解である. ここで, 関数 h は, ルジャンドル変換

$$h(y) = \sup_\lambda \{\lambda y - \rho(\lambda)\}, \quad \rho(\lambda) = \log M(\lambda)$$

である.

4. 非平衡揺動

1 次元 Ginzburg-Landau モデルに関する非平衡揺動の問題は [1] において解決された. ここではその結果を概説する. 場の揺動 $\zeta^N(t)$ を,

$$\zeta_i^N(t) = \sqrt{N}\left(x_i(t) - m\left(t, \frac{i}{N}\right)\right)$$

とし, この分布を P_t^N とする. $\alpha \in \mathbb{R}$ に対し, $H_{-\alpha}$ を S 上の Sobolev 空間とし, フーリエ係数

$$\hat{\zeta}(p) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \zeta_j e^{ipj/N}$$

について

$$\|\zeta\|_{-\alpha}^2 = \sum_{p\in\mathbb{Z}} |\hat{\zeta}(p)|^2 (1+p^2)^{-\alpha}$$

によってそのノルムを定義する. $\alpha > 9/2$ に対して, 揺動 ζ_t^N は, $H^{-\alpha}$-値確率過程とみなすことができる. 以下, $\alpha > 9/2$ とする.

定理を述べるために必要な仮定は以下である.

(B1) ポテンシャル ϕ は, 狭義凸である. すなわち, $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ があって,

$$0 < \gamma_1 < \phi''(x) < \gamma_2, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

を満たす.

(B2) x_i と $m(i/N)$ の S における平均をそれぞれ $\overline{x}, \overline{m}$ として,

$$\overline{\zeta} = \zeta^N - \sqrt{N}(\overline{x} - \overline{m})$$

としたとき,

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{\sqrt{N}} E_{\text{non}}^N \left[\|\overline{\zeta}_0^N\|_{-1}^2 \right] = 0$$
$$\limsup_{N\to\infty} \sqrt{N} E_{\text{non}}^N \left[|\overline{x} - \overline{m}|^2 \right] = 0$$

が成り立つ. ただし, 初期分布 $f_N^0\Phi_N$ に対する期待値を, E_{non}^N と表す.

(B3) $H^{-\alpha}$ に弱収束構造を入れた測度空間を $M(H^{-\alpha})$ とする. このとき, 揺動の初期分布 P_0^N は, $M(H^{-\alpha})$ 上弱収束する.

仮定 (B1) は対数 Sobolev 不等式や H^{-1}method と呼ばれる技法を用いるために本質的に必要である.

定理 2 ([1] Theorem1.) 仮定 (A1)∼(A2), (B1)∼(B3) の下, $P^N = (P_t^N)_t$ は, $C(S, H_{-\alpha})$ において, 確率偏微分方程式 (SPDE)

$$\frac{\partial}{\partial t}\zeta^\infty(t) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(h''(m(t,\theta))\zeta^\infty(t)) + \frac{\partial}{\partial\theta}\dot{W}(t,x)$$

の解である, Ornstein-Uhlenbeck 過程に弱収束する. ここで, $\dot{W}$ は時空ホワイトノイズ過程である.

定理 3 ([1] Theorem2.) 仮定 (A1)∼(A2), (B1), (B2) の下, $l > 0$, $2K+1 = \sqrt{N}(2l+1)$ として,

$$\overline{x}_{i,k}(t) = \frac{1}{2K+1}\sum_{|j-i|\leq K} x_j(t), \quad i = 1, \ldots, N$$

とする. このとき, t についてコンパクトな区間で一様に,

$$\lim_{l\to\infty}\limsup_{N\to\infty} E_{\text{non}}^N \left[\int_0^t \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{N} \left(\overline{x}_{i,K}(t) - m\left(s, \frac{i}{N}\right)\right)^2 ds \right] = 0$$

が成り立つ.

5. 参考文献

[1] Chang, C. C., Yau, H. T.: Fluctuation of one dimensional ginzburg-landau model in nonequilibrium. Commun. Math. Phys. 145, 209-234 (1992)

[2] Guo, M. Z., Papanicolaou, G. C., Varadhan, S. R. S.: Nonlinear diffusion limit for a system with nearest neighbor interactions. Commun. Math. Phys. 118, 31-59 (1988)