

傾斜角度 55 度の階段状水路における nonaerated skimming flow の乱流境界層発達状況

Boundary Layer Development of Nonaerated Skimming Flows in a 55° Stepped Channel

○橋本大輝¹, 佐藤柳言², 高橋正行²

*Daiki Hashimoto¹, Ryugen Satoh², Masayuki Takahashi²

Abstract: This study shows local skin friction coefficients for wide range of relative step heights in a 55° stepped channel. An empirical equation for the local skin friction coefficients is proposed, developing the analytical calculation method for the water depth and the boundary layer thickness in the 55° stepped channel.

1. まえがき

急傾斜水路における射流の運動エネルギーを傾斜面上で減勢させる方法として階段状水路が利用されている^{[1],[2]}。階段状水路上の流況は、水路傾斜角度 θ と相対ステップ高さ S/d_c (S : ステップ高さ, $d_c [= \sqrt[3]{q^2/g}$]: 限界水深, q : 単位幅流量, g : 重力加速度) によって変化する^[1]。階段状水路で skimming flow (ステップの隅角部で常に渦の形成が認められる流況)^[1]が生じるとき、流下とともに乱流境界層が発達し、やがて水面に到達して空気が混入し始める。この断面は inception point (以下 I.P. と略す) と呼ばれ^[1], I.P. の上流側で nonaerated skimming flow が形成される (Fig. 1 参照)。

最近, nonaerated skimming flow の水深と乱流境界層厚の解析的計算法が示され^[3], $\theta = 19^\circ$ の階段状水路に対して検証された^[4]。しかしながら, 重力式コンクリートダムで採用されるような傾斜角度の大きい場合に対して, この解析的計算法^{[3],[4]}に必要な局所摩擦抵抗係数が明らかにされていないため適用できていない。

本研究は, nonaerated skimming flow の乱流境界層厚と水深の解析的計算法^{[3],[4]}を水路傾斜角度 $\theta = 55^\circ$ の階段状水路に対して検証したものである。

2. 実験

実験は, 水路幅 $B = 50.0\text{ cm}$ の長方形断面水路 (Fig. 1 参照) において, 越流開始点 O から堰頂水平部終端 (点 a) までの区間が広頂堰となり, 点 a から点 b までの区間が WES の標準型越流堰下流側の形状となるように調整された堰を設置して行われた。この堰の下流側に $\theta = 55^\circ$ かつ $S = 2.5\text{ cm}$ の階段状水路が接続されている。Skimming flow の生じる S/d_c を対象に, 単位幅流量 q を Table. 1 のように調整した。ここに, T は水温, $Re [= q/\nu]$ はレイノルズ数, $\nu [= \mu/\rho]$ は水の動粘性係数, μ は水の粘性係数, ρ は水の密度である。

Edge 断面を対象に, 水深 d はポイントゲージを用いて測定された。時間平均流速 \bar{u} は, ピトー管 (管径 3 mm , JIS-B8330) を用いて測定された。水深と流速の測定は水路中央面 ($z = 0$) を対象とした。空気混入開始断面近傍の水面の流況は, 高速度ビデオカメラ (撮影速度 1000 fps , 露光時間 $1/1000\text{ s}$) を用いて観察された。

3. 水深と乱流境界層厚の解析的計算法

堰上流側の断面① (Fig. 1) と階段状水路の任意な edge 断面 (断面③, Fig. 1) との間の自由水面に沿う流線にベルヌーイの定理を適用すると, 乱流境界層外側の領域 ($\delta \leq y \leq d$, y は仮想底面を原点とする垂直上向きの座標, δ は乱流境界層厚) のエネルギー損失は無視できる^[5]ため,

$$1.5d_c + x \sin \theta = d \cos \theta + U^2/(2g) \quad (1)$$

が示される。ここに, x は仮想底面 (pseudo bottom) に沿う堰頂からの流下方向座標, U は乱流境界層外側流速である。

Nonaerated skimming flow の edge 断面における時間平

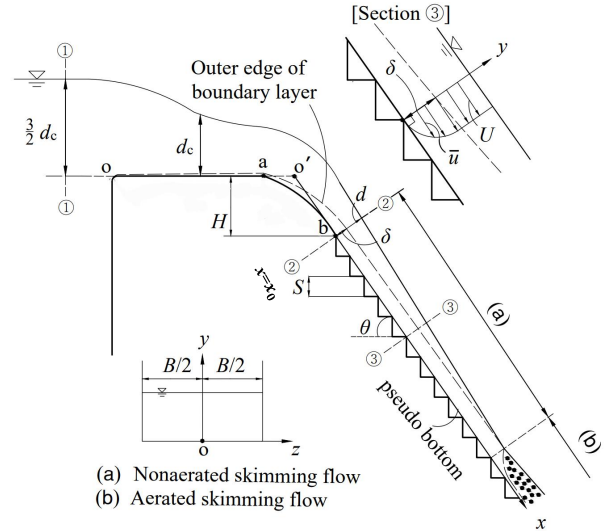


Figure 1. Definition sketch of a stepped channel

Table 1. Experimental conditions

$\theta(^{\circ})$	$S/d_c (-)$	$q (\text{m}^2/\text{s})$	$T (^{\circ}\text{C})$	$Re \times 10^{-4} (-)$
55	0.2	0.138	20	14
55	0.5	0.0350	20	3.5
55	0.8	0.0173	20	1.7

均流速 \bar{u} の分布について, 乱流境界層内 ($0 \leq y \leq \delta$) では,

$$\bar{u}/U = (y/\delta)^{1/N} \quad \text{for } 0 \leq y \leq \delta \quad (2)$$

で近似されるものとする。また, 乱流境界層外 ($\delta \leq y \leq d$) では, 一様流速分布となるため,

$$\bar{u}/U = 1 \quad \text{for } \delta \leq y \leq d \quad (3)$$

である。

排除厚 δ_1 は, $\delta_1 = \int_0^d (1 - \bar{u}/U) dy$ で定義され, 式 (2) と式 (3) を用いると,

$$\delta_1 = \delta/(N + 1) \quad (4)$$

となる。また, 単位幅流量 q は, 式 (2) と式 (3) を用いると,

$$q = \int_0^d \bar{u} dy = U(d - \delta_1) \quad (5)$$

で示される。式 (4) と式 (5) を式 (1) に適用し, 後述 4.1. の結果より, N は x によらず一定であるから, 両辺を x で微分すると,

$$\frac{dd}{dx} = \frac{\sin \theta \left(\frac{d}{d_c} - \frac{1}{1+N} \frac{\delta}{d_c} \right)^3 - \frac{1}{1+N} \frac{d\delta}{dx}}{\cos \theta \left(\frac{d}{d_c} - \frac{1}{1+N} \frac{\delta}{d_c} \right)^3 - 1} \quad (6)$$

が得られる^[3]。

非圧縮性・粘性流体で二次元定流の場合, 階段状水路の

nonaerated skimming flow において、仮想底面上の剪断応力 $\bar{\tau}_0$ を考慮することで乱流境界層の運動量方程式は、

$$\frac{d\delta_2}{dx} + \frac{2\delta_2 + \delta_1}{U} \frac{dU}{dx} = \frac{C_f}{2} \quad (7)$$

で示される^[3]. ここに、 $\delta_2 [= \int_0^d \frac{\bar{u}}{U} (1 - \frac{\bar{u}}{U}) dy]$ は運動量厚、 $C_f [= \frac{\bar{\tau}_0}{\frac{1}{2}\rho U^2}]$ は局所摩擦抵抗係数である. 式(2)と式(3)を用いると、 δ_2 は、

$$\delta_2 = N\delta / \{(N+1)(N+2)\} \quad (8)$$

となる. 式(7)に式(1), 式(4), 式(8)を代入すると、

$$\frac{d\delta}{dx} = \frac{(N+1)(N+2)}{2N} C_f - \left(1 + \frac{N+2}{2N}\right) \cdot \frac{\delta}{x} \cdot \frac{\sin\theta - \frac{d}{dx} \cos\theta}{\sin\theta + 1.5 \frac{d_c}{x} - \frac{d}{x} \cos\theta} \quad (9)$$

が得られる. すなわち、与えられた θ, q (あるいは d_c), N, C_f に対する階段状水路の nonaerated skimming flow における水深と乱流境界層厚の流下方向変化は、式(6)と式(9)の両式を用いて求められる.

4. 結果

4.1. 流速分布

Nonaerated skimming flow の edge 断面における相対流速 \bar{u}/U の分布の一例を **Fig. 2** に示す. なお、乱流境界層厚 δ の間接測定値は、 d, \bar{u} の実験値を δ_1 と δ_2 の定義式に代入し、 δ_1 と δ_2 をそれぞれ求め、これらを

$$\delta = \{(H_{12} + 1)/(H_{12} - 1)\} \delta_1 \quad (10)$$

に代入して算出された. ここに、 $H_{12} [= \delta_1/\delta_2]$ は形状係数である. また、**Fig. 2** の実線は式(2)と擬似等流空気混入水流における N の実験式、

$$N = 14\theta^{-0.65} \frac{S}{d_c} \left(\frac{100}{\theta} \frac{S}{d_c} - 1 \right) - 0.041\theta + 6.27 \quad (\theta \text{ in deg.}) \quad (11)$$

より得られる \bar{u}/U の計算値である. **Fig. 2** より、与えられた θ と S/d_c に対して乱流境界層内 ($0 \leq y/\delta \leq 1$) の \bar{u}/U の実験値と計算値は、決定係数 $R^2 = 0.87$ で一致した. すなわち、 $\theta = 55^\circ$ の nonaerated skimming flow の境界層内での流速分布は、式(2)と式(11)で近似できる.

4.2. 水深と乱流境界層厚の流下方向変化

与えられた θ と S/d_c に対して、 d と δ の測定値および式(11)より算出された N の値を式(9)に用いると、局所摩擦抵抗係数 C_f の間接測定値が得られる. この方法で得られた C_f の間接測定値より、 $\theta = 55^\circ$ の場合の C_f の実験式、

$$C_f = \left(0.0649 - 0.035 \frac{S}{d_c} \right) \left(\frac{x}{S \cos\theta} \right)^{-\frac{1.062}{N}} \quad \text{for } 0.2 \leq S/d_c \leq 0.8 \quad (12)$$

を提案する. 与えられた θ と S/d_c に対して、式(6), 式(9), 式(11), 式(12)から得られる d/d_c と δ/d_c の計算値を **Fig. 3** の各線に示す. また、 d/d_c と δ/d_c の測定値を **Fig. 3** に各プロットで示す. なお、 d/d_c と δ/d_c の解析的計算の境界条件には、階段状水路開始断面② ($x = x_0$) の水深 d と乱流境界層厚 δ の実験値を与えた. **Fig. 3** より、与えられた θ に対して、 S/d_c の増加に伴い、 $d/d_c = \delta/d_c$ となる I.P. までの相対距離 $(x - x_0)/d_c$ は小さくなる.

4.3. 水面の流況観察

空気混入開始断面近傍の水面の静止画の一例を **Fig. 4** に示す. 階段のステップ隅角部で水路横断方向全体に空気混

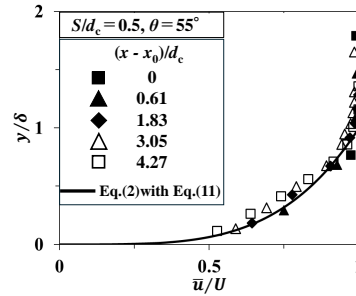


Figure 2. Velocity profiles

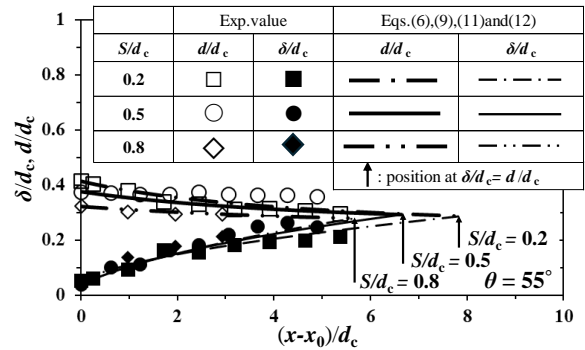


Figure 3. Water depth and boundary layer thickness

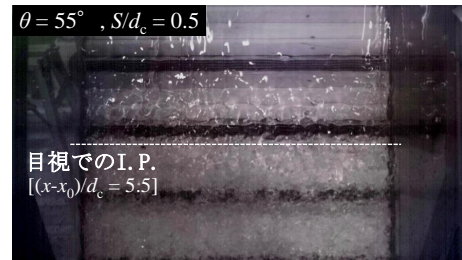


Figure 4. Flow conditions of the inception point

入し始めた最上流断面は、 $\theta = 55^\circ$ かつ $S/d_c = 0.5$ のとき、 $(x - x_0)/d_c = 5.5$ であった (**Fig. 4** 参照). 一方、nonaerated skimming flow の水深と乱流境界層厚の発達状態の解析結果から推定される $\delta/d_c = d/d_c$ となる断面、すなわち、式(6), (9), (11), (12)より $\delta/d_c = d/d_c$ となるのは $(x - x_0)/d_c = 6.6$ であった (**Fig. 3** 参照). これらの誤差率は 17% で一致している.

5. まとめ

傾斜角度 $\theta = 55^\circ$ かつ $0.2 \leq S/d_c \leq 0.8$ の nonaerated skimming flow を対象に、従来示されている水深と乱流境界層厚の解析的計算法の適用範囲の拡張を行った. 乱流境界層厚内において、相対流速 \bar{u}/U の分布は $1/N$ 乗則で近似され、式(2)が適用できることを確認した. また、局所摩擦抵抗係数の実験式を提案し、水深 d/d_c と乱流境界層厚 δ/d_c の解析計算値と測定値とが概ね一致することを示した. さらに、高速度ビデオカメラによる観察での I.P. と解析的に得られる I.P. とが概ね一致することを示した.

参考文献

- [1] Ohtsu, I., Yasuda, Y., and Takahashi, M.: Flow characteristics of skimming flows in stepped channels, *J. Hydraul. Eng.*, 130(9), 860–869, 2004.
- [2] Takahashi, M. and Ohtsu, I.: Aerated flow characteristics of skimming flow over stepped chutes, *J. Hydraul. Res.*, 50(4), 427–434, 2012.
- [3] 佐藤柳言, 高橋正行, 大津岩夫: 階段状水路における nonaerated skimming flow の解析的検討, 土木学会論文集 B1(水工学), 75(2), I.811–I.816, 2019.
- [4] 佐藤柳言, 高橋正行, 大津岩夫: 階段状水路における nonaerated skimming flow の流速特性と局所摩擦抵抗係数に与える相対ステップ高さの影響, 土木学会論文集 B1(水工学), 77(2), I.835–I.840, 2021.
- [5] Iwasa, Y.: Boundary layer growth of open channel flows on a smooth bed and its contribution to practical application to channel design, *Memoirs, Faculty of Eng., Kyoto Univ.*, 19(3), 229–254, 1957.