

非最小位相特性に対処可能なフラットネスを用いた飛行制御系の検討

A Study on a Flight Control System using the Flatness for Dealing with the Non-minimum Phase Characteristics

○澤田陽人<sup>1</sup>, 星亮太朗<sup>2</sup>, 安部明雄<sup>3</sup>

\*Haruto Sawada, Ryotaro Hoshi and Akio Abe

Abstract: In general, the longitudinal motion of an aircraft is represented by a non-minimum phase characteristic with an unstable zero. The characteristics of the non-minimum phase system initially undershoot in the opposite direction of the target value, resulting in a long settling time. This paper shows that the application of a control law based on the input-output linearization method to the nonlinear dynamics of an aircraft may lead to internal instability due to unstable zero dynamics. For this problem, we attempt to design a control system based on the flatness concept for a nonlinear dynamics of an aircraft.

1. はじめに

一般に航空機の縦運動は、実数部が正の不安定零点を有する非最小位相系で表される。この不安定零点は、航空機のエレベータ操舵が直接揚力に与える影響によって生じる。非最小位相系は、応答の初期に目標値と逆向きのアンダーシュートを生じるため、整定時間が長くなる。また、不安定零点は、不安定極のように系を直接的に不安定化させないものの、フィードバックで実数部が負の領域に移動させることができない。

非線形系で、線形系の不安定零点の特性に対応するのが不安定なゼロダイナミクスである。入出力線形化法に基づく制御則を適用した場合、不安定なゼロダイナミクスが存在すると内部不安定化を招く場合がある。

この問題に対して、文献[1]ではVTOL機のホバリング時、文献[2]では航空機の着陸時に関して、不安定なゼロダイナミクスを有する非線形系の制御系の設計について述べられている。文献[1]と[2]では、フラットネスの概念を用いて拡張した状態空間表現を基に制御系を設計し、内部不安定化やアンダーシュートによる応答の劣化の改善を試みている。ただし、これらの研究では、本来の機体の特性を一部無視したり、正規化して時間のスケールを変化させて簡略化されたモデルを基に設計を行っている。

そこで、本稿では、より一般的な航空機の非線形モデルに基づく、フラットネスを用いた飛行制御系の設計を取り扱う。フラットネスによって拡張した状態空間表現に対して入出力線形化法を適用することで、制御系設計の容易な状態空間表現を得る。

2. 機体の運動モデル

本稿では、(1)式の航空機の縦運動のモデルを制御対象として取り扱う。入出力線形化法を適用する際に系の特性を見きわめやすいように、(1a)式の第1~4成分の

機体の並進運動に関しては、一般的な機体固定座標系ではなく、慣性座標系を用いて記述している。第5, 6成分は、機体固定座標系で記述した回転運動を表す。(1b)式は、(1a)式の略記表現である。

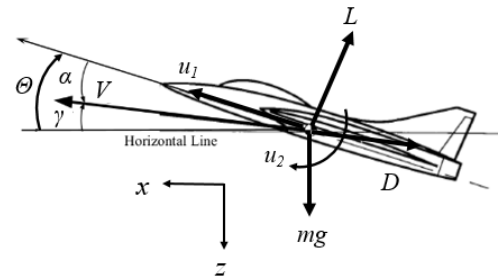


Figure 1. Definitions of Coordinates and Variables

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ z \\ \dot{x} \\ \dot{z} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \\ -D \cos \gamma / m - L \sin \gamma / m \\ D \sin \gamma / m - L \cos \gamma / m + g \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \cos \theta / m & \epsilon \sin \theta / m \\ -\sin \theta / m & \epsilon \cos \theta / m \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \tag{1a}$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u}(t) \tag{1b}$$

$$\mathbf{y} = [\mathbf{x}, \mathbf{z}]^T \tag{2}$$

状態量 $\mathbf{x}$ は、Figure 1に示すように、6次元で水平面の位置 $x$ と鉛直方向の位置 $z$ とその微分量 $\dot{x}$ と $\dot{z}$ 、及びピッチ角 $\theta$ とピッチ角速度 $\dot{\theta}$ である。揚力 $L$ と抗力 $D$ は、(3)、(4)式のように動圧 $0.5\rho V^2$ 、代表面積 $S$ 、揚力係数 $C_L$ 、抗力係数 $C_D$ を用いて表される。フラットネスでは、 $C_L$ と $C_D$ の時間微分も必要になるため、一般的な空力特性からそれぞれ迎角の1次と2次関数で表現する。また、 $\gamma$ は飛行経路角、 $m$ は機体重量、 $g$ は重力加速度である。制御入力 $\mathbf{u}$ は、機体の推力 $u_1$ とピッチングモーメント $u_2$ である。また、 $\epsilon$ は、微小パラメータで、(1a)式の第3, 4成分の $\epsilon u_2$ は、本来(3)式の揚力に含まれるエレベ

1 : 日大理工・学部・航宇 2 : 日大理工・大学院・航宇 3 : 日大理工・教員・航宇

一タ操舵が直接揚力に与える影響を表しており、非最小位相特性の特徴を表している。

$$L = 0.5\rho V^2 S C_L = 0.5\rho V^2 S (C_{L\alpha 0} + C_{L\alpha 1} \alpha) \quad (3)$$

$$D = 0.5\rho V^2 S C_D \\ = 0.5\rho V^2 S (C_{D\alpha 0} + C_{D\alpha 1} \alpha + C_{D\alpha 2} \alpha^2) \quad (4)$$

また、飛行経路角 $\gamma$ と迎角 $\alpha$ は以下の式で表される。

$$\gamma = \tan^{-1}(\dot{z}/\dot{x}) \quad (5)$$

$$\alpha = \theta - \gamma \quad (6)$$

また、表記の簡略化のため、リー微分の演算子を用いて(1)、(2)式を次式のように表す。(1)式で、 $L_f^1 \mathbf{h}(\mathbf{x}) = (\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}) / \partial \mathbf{x}) \mathbf{f}(\mathbf{x})$ の演算を表す。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{h}(\mathbf{x}) \\ L_f^1 \mathbf{h}(\mathbf{x}) \\ \boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_f^1 \mathbf{h}(\mathbf{x}) \\ L_f^2 \mathbf{h}(\mathbf{x}) \\ \boldsymbol{\psi}_1(\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x})) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ L_G^1 L_f^1 \mathbf{h}(\mathbf{x}) \\ \boldsymbol{\psi}_2 \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (7)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) \quad (8)$$

### 3. 制御系の構成

本節では、3.1項で(1)、(7)式のモデルを基に入出力線形化法を用いた制御系の構成を示す。3.2項では、微小パラメータ $\epsilon$ を零とし、フラットネスを用いて拡張した状態空間表現を基に制御系を設計した結果を述べる。

#### 3.1 入出力線形化法に基づく制御系

外生入力を $\mathbf{v} = [v_1, v_2]^T$ として、(1)または(7)式に次のフィードバック線形化法を適用する。

$$\mathbf{u} = (L_G^1 L_f^1 \mathbf{h}(\mathbf{x}))^{-1} (-L_f^2 \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{v}) \quad (9)$$

(7)式に対して、(9)式を適用すると次式が得られる。ここで、 $\mathbf{I}$ は単位行列、 $\mathbf{0}$ は要素が零の行列またはベクトルを表し、下付きの添え字は次元を表す。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{h}(\mathbf{x}) \\ L_f^1 \mathbf{h}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{I}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h}(\mathbf{x}) \\ L_f^1 \mathbf{h}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{I}_{2 \times 2} \end{bmatrix} \mathbf{v} \quad (10)$$

元のシステムの状態量 $\mathbf{x}$ が6次元であるのに対して、変換後のシステム(10)式の状態量は4次元である。よって、2次元のゼロダイナミクス $\dot{\boldsymbol{\eta}}(\mathbf{x})$ が生じている。出力 $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ が、目標値に収束したとすると通常誤差のフィードバックで表される外生入力は零となり、ゼロダイナミクス $\dot{\boldsymbol{\eta}}(\mathbf{x})$ の2番目の要素は、次式で表される。

$$\ddot{\theta} = (D \sin \theta + L \cos \theta - mg \cos \theta) / \epsilon \quad (11)$$

(11)式は、(10)式の出力 $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ から不可観測な部分空間となり、制御則によって安定化することができない。また、(11)式は、文献[2]で同様のモデルの位相平面での解析の結果、不安定な特性を有することが述べられており、不安定なゼロダイナミクスである。

#### 3.2 フラットネスの概念の適用

本項では、文献[1]、[2]に倣い、微小パラメータ $\epsilon$ を零とした簡易モデルを用いて、フラットネスの概念を利

用して拡張した状態空間表現を導入する。表記の区別のため、 $\epsilon = 0$ の場合は、添え字 $m$ をつけて表す。拡張した状態空間表現では、 $\mathbf{u}_1$ の代わりに2階微分 $\ddot{\mathbf{u}}_1$ を新たに制御入力として取り扱う。(1)または(7)式で、 $\epsilon = 0$ の場合は、出力の4階微分で制御入力に関する陽な項が現れ、(12)式のように表記できる。拡張した系である(12)式では、入力 $\mathbf{u}_f = [\ddot{u}_1, \ddot{u}_2]^T$ 、出力 $\mathbf{y}_m = \mathbf{h}(\mathbf{x}_{mf})$ 、状態量 $\boldsymbol{\xi}_{mf} = [\mathbf{h}(\mathbf{x}_{mf}), L_f^1 \mathbf{h}(\mathbf{x}_{mf}), L_f^2 \mathbf{h}(\mathbf{x}_{mf}), L_f^3 \mathbf{h}(\mathbf{x}_{mf})]^T$ と定義する。(12)式は、(13)式の線形化フィードバックによって線形化することができる。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{h}(\mathbf{x}_{mf}) \\ L_f^1 \mathbf{h}(\mathbf{x}_{mf}) \\ L_f^2 \mathbf{h}(\mathbf{x}_{mf}) \\ L_f^3 \mathbf{h}(\mathbf{x}_{mf}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_f^1 \mathbf{h}(\mathbf{x}_{mf}) \\ L_f^2 \mathbf{h}(\mathbf{x}_{mf}) \\ L_f^3 \mathbf{h}(\mathbf{x}_{mf}) \\ L_f^4 \mathbf{h}(\mathbf{x}_{mf}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ L_G^1 L_f^3 \mathbf{h}(\mathbf{x}_{mf}) \end{bmatrix} \mathbf{u}_f \quad (12)$$

$$\mathbf{u}_f = (L_G^1 L_f^3 \mathbf{h}(\mathbf{x}_{mf}))^{-1} (-L_f^4 \mathbf{h}(\mathbf{x}_{mf}) + \mathbf{v}_f) \quad (13)$$

線形化されたシステムは次式で表される。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{h}(\mathbf{x}_{mf}) \\ L_f^1 \mathbf{h}(\mathbf{x}_{mf}) \\ L_f^2 \mathbf{h}(\mathbf{x}_{mf}) \\ L_f^3 \mathbf{h}(\mathbf{x}_{mf}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{6 \times 2} & \mathbf{I}_{6 \times 6} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h}(\mathbf{x}_{mf}) \\ L_f^1 \mathbf{h}(\mathbf{x}_{mf}) \\ L_f^2 \mathbf{h}(\mathbf{x}_{mf}) \\ L_f^3 \mathbf{h}(\mathbf{x}_{mf}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{I}_{2 \times 2} \end{bmatrix} \mathbf{v}_f \quad (14)$$

(14)式は、元の6次元システムから8次元の状態空間に拡張されており、ゼロダイナミクスは存在しない。

また、(14)式は、非干渉化された4次元1入力のサブシステム2つにわけることができ、状態量のフィードバック等により、適切に安定化可能である。

### 4. まとめ

本稿では、航空機の運動モデルを基に、非最小位相特性を有する機体の設計モデルを示した。制御対象に入出力線形化法のみを適用すると不安定なゼロダイナミクスが生じて、内部不安定化を招くことを示した。提案する手法では、フラットネスの概念を用いて拡張した状態空間表現に入出力線形化法を適用することで、ゼロダイナミクスの生じない線形化された制御系設計モデルが得られた。

### 5. 参考文献

- [1] J. Hauser, S. Sastry, and G. Meyer : Nonlinear Control Design for Slightly Non-minimum Phase Systems: Application to V/STOL Aircraft, *Automatica*, Vol. 28, No. 4, pp. 665-675, 1992.
- [2] Claire Tomlin, John Lygeros, Luca Benvenuti, and Shankar Sastry : Output Tracking for a Non-minimum Phase Dynamic CTOL Aircraft Model, *Proc. IEEE conf. Decision and Control*, pp.1867-1872, 1995.