O-16

量子 Parisi 公式のための補間法

Interpolation method for a quantum Parisi formula

○ 藤原克真 [1], 坂元啓紀 [2], 糸井千岳 [3]

*K. Fujiwara[1], Y. Sakamoto[2], C. Itoi[3]

概要： 横磁場 Sherrington-Kirkpatrick(SK) 模型の量子 Parisi 公式を補間法により厳密に証明する.

次のような，N 個の Pauli 演算子 $(\sigma_i^x, \sigma_i^z)_{i=1,\cdots,N}$ を独立な標準 Gauss クエンチランダム変数 $g_{i,j}$ で結合させせ，横磁場 b を印加した量子 SK 模型のハミルトニアンを考える.

$$H_N(\sigma, g, b) = -\sqrt{\frac{1}{N}} \sum_{1 \le i < j \le N} g_{i,j} \sigma_i^z \sigma_j^z - b \sum_{1 \le i \le N} \sigma_i^x. \tag{1}$$

最近 Manai と Warzel は Panchenko の方法によりこの模型の自由エネルギー密度の厳密解を初めて求め “quantum Parisi formula”と呼んだ [1]．我々は，Talagrand の補間法 [2] を拡張することによって [1] と同等と思われる次の公式が自由エネルギー密度の厳密解を与えることを証明する.

量子 Parisi 公式

量子 SK 模型の逆温度 β での無限体積自由エネルギー密度は次から定まる.

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \mathbb{E} \log \mathrm{Tr} e^{-\beta H_N(\sigma, g, b)} = \sup_y \inf_{k,m,q} \mathcal{P}_k(\beta, b, m, q, y). \tag{2}$$

上記の $\mathcal{P}_k$ は $k-1$ 段階レプリカ対称性の破れを持つ変分関数で以下のように定義される．独立な標準 Gauss 確率変数列を $(z_j^p)_{1 \le j \le N, 0 \le p \le k+1}$，3 つの変分パラメーター列を次で定める.

$$m := (m_p)_{0 \le p \le k+1}\ ; \quad 0 = m_0 < m_1 \le m_2 \le \cdots \le m_k = m_{k+1} = 1, \tag{3}$$

$$q := (q_p)_{0 \le p \le k+1}\ ; \quad 0 = q_0 \le q_1 \le q_2 \le \cdots \le q_k \le 1, q_{k+1} = 0, \tag{4}$$

$$y := (y_{l,l'})_{1 \le l,l' \le M}\ ; \quad 0 \le y_{l,l'} \le 1. \tag{5}$$

$\mathbb{E}_p$ を z^p の期待値とした下降漸化式 $\zeta_{p-1}(\beta, b, m, q, y) = [\mathbb{E}_p \zeta_p(\beta, b, m, q, y)^{m_p}]^{\frac{1}{m_p}}$ および，次の汎関数表示された 1 スピン分配関数が与える $p = k$ における初期条件

$$\zeta_k(\beta, b, m, q, y) := \sum_{\xi \in \Sigma_{M,1}} \exp \frac{\beta}{M^2} \sum_{1 \le l,l' \le M} \Big[\Big(\sum_{p=0}^{k} \sqrt{q_{p+1} - q_p} z_1^p \Big) \xi_l + \frac{\beta}{2} y_{l,l'} \xi_{l,1} \xi_{l',1} + MK \xi_{l,1} \xi_{l+1,1} \Big].$$

から定まる ζ_0 と全試料期待値 $\mathbb{E}$ により $\mathcal{P}_k$ が次で定義される．上の式では虚時間のパラメーター $1 \le l \le M$ を導入し，各 $\xi_{l,i} \in \Sigma_{M,N}$ は格子点 $(l, i) \in \{1, 2, \cdots, M\} \times \{1, 2, \cdots, N\}$ の Pauli 演算子 σ_i^z の固有値であり固有値方程式 $\sigma_i^z |\xi\rangle = \xi_{l,i} |\xi\rangle$ で定義される．これらの古典的なスピン配位 ξ 全体を $\Sigma_{M,N}$ で表している.

$$\mathcal{P}_k(\beta, b, m, q, y) := \mathbb{E} \log \zeta_0(\beta, b, m, q, y) - \frac{\beta^2}{4} \Big[\sum_{p=1}^{k} m_l (q_{p+1}^2 - q_p^2) + \frac{1}{M^2} \sum_{1 \le l,l' \le M} y_{l,l'}^2 \Big].$$

---

1 : 日大理工・院 (前)・物理, 2 : 日大理工・教員・一般，3 : 日大理工・教員・物理

証明の方針

補間パラメーターを $0 \le s, t \le 1$ としたハミルトニアンを次で定義する.

$$H_{M,N}(s,t,\xi,b,y,g,z) = -\sum_{l\in I_M}\Big[\frac{\sqrt{s}}{M\sqrt{N}}\sum_{1\le i<j\le N}(g_{i,j}+\imath\sqrt{t}g^k_{i,j})\xi_{l,i}\xi_{l,j}$$
$$+\frac{\sqrt{1-s}}{M}\sum_{i\in I_N}\sum_{p=0}^{k}\sqrt{q_{p+1}-q_p}z^p_i\xi_{l,i}+\sum_{i\in I_N}K\xi_{l,i}\xi_{l+1,i}\Big]-\frac{\beta t}{2M^2}\sum_{l,l'\in I_M}\sum_{i\in I_N}y_{l,l'}\xi_{l,i}\xi_{l',i}. \quad (6)$$

補間の分配関数も，$p(\le k)$ に対する次の下降漸化式 $Z_{M,N,p-1}(s,t) = [\mathbb{E}_p Z_{M,N,p}(s,t)^{m_p}]^{\frac{1}{m_p}}$，と $p = k$ における分配関数を次の初期条件で定義する.

$$Z_{M,N,k}(s,t) := \sum_{\xi\in\Sigma_{M,N}} e^{-\beta H_{M,N}(s,t,\xi,b,y,g,z)}.$$

$(s,t) = (0,1)$ において，この模型は独立スピン模型で一体問題となり $Z_{M,N,0}(0,1) = \zeta_0(\beta,b,q,y)^N$ と表される．また，$(s,t) = (1,0)$ において，求める横磁場 SK 模型の分配関数は

$$\mathrm{Tr}e^{-\beta H_N(\sigma,g,b)} = \lim_{M\to\infty} Z_{M,N,k}(1,0),$$

と与えられる．求める自由エネルギー密度を求めるために，補間関数を

$$\varphi_k(s,t) := \frac{1}{N}\mathbb{E}\log Z_{M,N,0}(s,t), \quad (7)$$

で定義すると $\varphi_k(0,1) = \log\zeta_0(\beta,b,q,y)$ であり，$\varphi_k(1,1)$ は修正模型の解で，量子的な剰余項を持たない．関数 $\varphi_k(s,t)$ の s,t に関する偏微分公式を導びき，それぞれの積分

$$\varphi_k(1,1)-\varphi_k(0,1) = \int_0^1 ds\frac{\partial\varphi}{\partial s}(s,1), \quad \varphi_k(1,0)-\varphi_k(1,1) = \int_1^0 dt\frac{\partial\varphi}{\partial t}(1,t) \quad (8)$$

から $\varphi_k(0,1)\to\varphi_k(1,1)\to\varphi_k(1,0)$ の順序で考えていく．補間関数 $\varphi_k(s,t)$ の偏微分を計算して積分することにより，次の Guerra-Talagrand 等式が得られる.

$$\varphi_k(1,0) = \mathcal{P}_k(\beta,b,m,q,y) - \mathcal{R}_1(N,m,q) + \mathcal{R}_2(N,y). \quad (9)$$

等式 (9) の右辺第 2 項 $\mathcal{R}_1(N,m,q)$ は $\varphi_k(1,1)-\varphi_k(0,1)$ から得られ，古典的な剰余項と同じ形をしている．そのため，Talagrand が古典系で示したこと [2] と同様に，q_r を適切に選べば無限体積極限で $\lim_{N\to\infty}\mathcal{R}_1(N,m,q) = 0$, を証明することができる．最終項 $\mathcal{R}_2(N,y)$ は $\varphi_k(1,0)-\varphi_k(1,1)$ から得られ，異なる時刻を持つスピン配位の間の量子的な相関関数からなる剰余項である．我々は，この項も $y_{l,l'}$ を適切に選べば無限体積極限で

$$\lim_{N\to\infty}\mathcal{R}_2(N,y) = 0,$$

と消えることを示し，量子 Parisi 公式 (2) が厳密解であることを証明した.

参考文献：

[1] C. Manai, S. Warzel, “A Parisi formula for quantum spin glasses. ” arXiv:2403.06155.
[2] M. Talagrand, “The Parisi formula.” Ann. Math. **163**, 221-263 (2006).