P-1

格子点に対する逐次最小近似と数の幾何学

Successive minima on lattices and geometry of numbers

○石渡大樹
*Daiki Ishiwata

Abstract: In this article, we explain the notion of successive minima on lattices and contributions due to Minkowski in the geometry of numbers. In particular, we show how Blichfeldt's lemma implies Minkowski's convex theorems.

1. はじめに

本稿においては, 幾何学的な方法, 特に格子点に対する H. F. Blichfeldt の補題を用いた証明による H. Minkowski の凸体定理の紹介を行う．逐次最小近似という概念に負う証明に関して論じ, 数論的な諸性質の考究に活用する．

2. Minkowski の凸体定理

定義 2.1 (凸体)**.** $\mathbb{R}^n$ の空でない部分集合で有界かつ凸な閉集合 $\mathfrak{B}$ を**凸体**という. ただし凸とは, 点 $P, Q \in \mathfrak{B}$ ならば, 線分 PQ 上の点がすべて $\mathfrak{B}$ に属する集合のことである.

定義 2.2 (格子)**.** $\mathbb{R}^n$ において座標がすべて有理整数である $\mathbb{Z}^n$ を格子点といい, 格子点全体の集合を格子と呼ぶ. より一般には, $\mathbb{Z}^n$ を実係数 n 次正則行列による線形変換で変換した像を, $\mathbb{R}^n$ の格子と定めるが, 本稿では簡単のため $\mathbb{Z}^n$ のみ考察する.

定理 2.1 (Minkowski の第一凸体定理)**.** [5, Theorem 10] $\mathbb{R}^n$ の部分集合 $\mathfrak{B}$ が原点を内点として含み, 原点に関して点対称な凸体であるとする. $\mathfrak{B}$ が通常の意味での体積 $\mu(\mathfrak{B})$ をもつものとする. このとき

$$\mu(\mathfrak{B}) \geq 2^n \tag{1}$$

ならば, $\mathfrak{B}$ は原点と異なる格子点を必ず含む.

注 2.1. $\mathfrak{B}$ の内点集合を改めて $\mathfrak{B}$ と考えてもよい. この場合は, 定理*2.1*の十分条件を $\mu(\mathfrak{B}) > 2^n$ とすれば良い.

Minkowski の第一凸体定理は, 最近の数論の成果のみならず, 物理学等にも応用されているといわれる. この定理には L. J. Mordell [4], C. L. Siegel [5] 等による別証明もある.

定義 2.3 (逐次最小近似)**.** $\mathbb{R}^n$ の凸体 $\mathfrak{B}, 1 \leq j \leq n$ に対し $\lambda_j = \inf\{\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0} : \lambda\mathfrak{B}$ が一次独立な格子点 j 個を含む $\}$ と定めると

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots \leq \lambda_n < \infty$$

となる. この $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ を凸体 $\mathfrak{B}$ の**逐次最小近似**という.

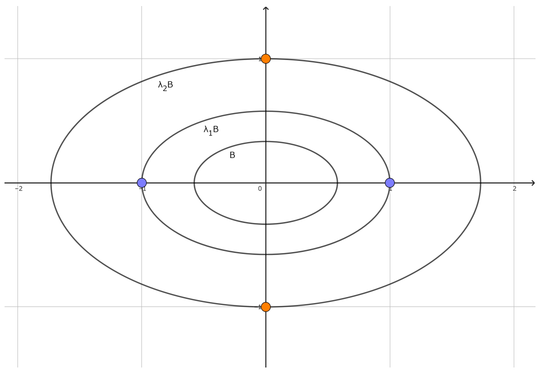

図 1: 逐次最小近似 λ_1, λ_2 の取り方

定理 2.2 (Minkowski の第二凸体定理)**.** [5, Theorem 16] $\mathbb{R}^n$ の部分集合 $\mathfrak{B}$ が原点を内点として含み, 原点に関して点対称な凸体であるとする. $\mathfrak{B}$ が通常の意味での体積 $\mu(\mathfrak{B})$ をもつとする. $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ を $\mathfrak{B}$ の逐次最小近似とする. このとき次の不等式が成り立つ.

$$\frac{2^n}{n!} \leq \lambda_1 \cdots \lambda_n \cdot \mu(\mathfrak{B}) \leq 2^n. \tag{2}$$

$\tilde{\lambda} = 2\mu(\mathfrak{B})^{-1/n}$ とおき, 定理2.1を凸体 $\tilde{\lambda}\mathfrak{B}$ に適用すると $\lambda_1^n \cdot \mu(\mathfrak{B}) \leq 2^n$ が従う [6, p. 80] ことより, 定理2.2は定理2.1よりも精密な評価を与えることがわかる.

3. Blichfeldt の補題

ここではMinkowski の第一凸体定理の証明に用いる Blichfeldt の補題を以下に紹介する.

補題 3.1 (Blichfeldt の補題)**.** [1, Theorem 1] まず $\phi \neq D \subset \mathbb{R}^n$ を，格子点による平行移動で不変な離散集合, つまり $\mathbb{R}^n$ の任意の格子点 $\mathbf{g} \in \mathbb{Z}^n$ に対し, $D + \mathbf{g} = D$ を満たすものとする. n 次元単位立方体 $\mathcal{E}$ と D との共通部分の元の個数が N 個であると仮定する. また, R を $\mathbb{R}^n$ の空でない部分集合で, 体積 $\mu(R) > 0$ をもつとする, このとき $\mathbf{x} \in \mathcal{E}$ が存在して, 集合 $R + \mathbf{x}$ が $N \cdot \mu(R)$ 個以上の D の点を含むようにすることができる.

特に R が有界閉集合ならば, $\mathbf{x} \in \mathcal{E}$ が存在して集合 $R+\mathbf{x}$ が $N \cdot \mu(R)$ 個より多くの D の点を含む.

日大理工・院 (前)・数学

補題3.1の証明は [6, p. 30–32] にある. 特に D を整数格子 $\mathbb{Z}^n$ に適用すると, 次の系が従う.

系 3.1 (Blichfeldt の補題 [5, Lemma 1]). $\mathfrak{M}$ を $\mathbb{R}^n$ の有界な開集合で, 通常の意味での体積 $\mu(\mathfrak{M})$ をもち, その体積は 1 より大きいと仮定する. このとき異なる 2 点 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathfrak{M}$ が存在して

$$\mathbf{x} - \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^n \text{ が成立する.} \tag{3}$$

系3.1の $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathfrak{M}$ は格子点とは限らないが, その差は常に格子点になるのである.

系3.1の証明を, 図によって説明してみよう. n 次元単位立方体を $\mathcal{E}$, 格子点を $\mathbf{g}$ とおく. $\mathbf{g}$ が全ての格子点を走るとき $\bigcup_{\mathbf{g}} \left(\mathcal{E} + \mathbf{g}\right) = \mathbb{R}^n$ となる. $\mathfrak{M}$ と $\mathcal{E} + \mathbf{g}$ が空でない共通部分を持つときの共通部分を $\mathfrak{M}_{\mathbf{g}}$, その体積を $V_{\mathbf{g}}$ とする. 仮定より $\mathfrak{M}$ は有界であることから $\mathfrak{M}_{\mathbf{g}} \neq \phi$ となる $\mathbf{g}$ は有限個に限る. 即ち $\mu(\mathfrak{M}) = \displaystyle\int_{\mathfrak{M}} dy = \sum_{\mathbf{g}} V_{\mathbf{g}}$ の和は, 有限和である. $\mathfrak{M}$ を $-\mathbf{g}$ で平行移動すると, $\mathcal{E}$ と $\mathfrak{M} - \mathbf{g}$ の共通部分は, 体積 $V_{\mathbf{g}}$ を持つ $\mathfrak{M}_{\mathbf{g}} - \mathbf{g}$ であり, このような図形は全て $\mathcal{E}$ に含まれる. 仮定より $\mu(\mathfrak{M}) = \sum_{\mathbf{g}} V_{\mathbf{g}}$ の体積は > 1 であるので, $\mathcal{E}$ の体積 $= 1$ から集合 $\mathfrak{M}_{\mathbf{g}} - \mathbf{g}$ は必ず重なる. この重なる $\mathfrak{M}_{\mathbf{g}'} - \mathbf{g}'$ と $\mathfrak{M}_{\mathbf{g}''} - \mathbf{g}''$ の共通部分に属する点を $\mathbf{x}'$ とおくと ($\mathbf{g}' \neq \mathbf{g}''$, 下記右図は重なり部分の状態), 2 点 $\mathbf{x} := \mathbf{x}' + \mathbf{g}'$ と $\mathbf{y} := \mathbf{x}' + \mathbf{g}''$ はいずれも $\mathfrak{M}$ に属し, その差 $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{g}' - \mathbf{g}''$ は格子点である.

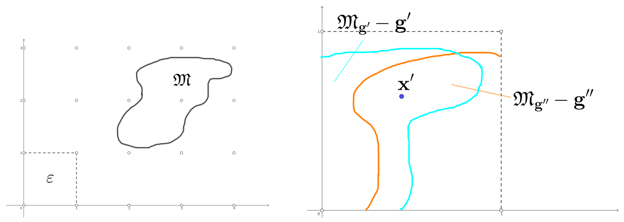

図 2: Blichfeldt の補題の系3.1の証明図

4. Minkowski 第一凸体定理の証明

詳しい証明は [6, p. 33] にあるが, $\mathfrak{B}$ を半分に縮小した集合を $\frac{1}{2}\mathfrak{B}$ とおくと, 仮定から

$$\mu\left(\frac{1}{2}\mathfrak{B}\right) \geq 1$$

である. $R = \frac{1}{2}\mathfrak{B}$, $N = 1$ に対し $N \cdot \mu(R) \geq 1$ より格子 $D = \mathbb{Z}^n$ に対して Blichfeldt の補題3.1を適用する. $\frac{1}{2}\mathfrak{B} + \mathbf{y}$ が異なる格子点 2 個をもつような $\mathbf{y} \in \mathcal{E}$ が存在する. その格子点 2 個を $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2$ ($\mathbf{g}_1 \neq \mathbf{g}_2$) とおくと $\mathbf{g}_1 - \mathbf{y}, \mathbf{g}_2 - \mathbf{y} \in \frac{1}{2}\mathfrak{B}$ となる. 仮定より, $\frac{1}{2}\mathfrak{B}$ は原点に関して点対称. 従って $\mathbf{y} - \mathbf{g}_2 \in \frac{1}{2}\mathfrak{B}$. $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathfrak{B}$ に対し

$$\mathbf{g}_1 - \mathbf{y} = \frac{1}{2}\mathbf{y}_1, \qquad \mathbf{y} - \mathbf{g}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{y}_2$$

と表すと

$$\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{y}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{y}_2$$

となる. $\mathfrak{B}$ は凸体より $\frac{1}{2}\mathbf{y}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{y}_2$, 即ち格子点 $\mathbf{g} := \mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2$ は $\mathfrak{B}$ に属する. $\mathbf{g} \in \mathbb{Z}^n$ であるが $\mathbf{g}_1 \neq \mathbf{g}_2$ より $\mathbf{g} \neq \mathbf{0}$. □

5. Minkowski 第二凸体定理の証明の概略

Minkowski 第二凸体定理の詳しい証明は, [6, Chapter IV] もしくは, [5, Chapter I, Lecture IV] にある. 逐次最小近似の概念を活かした上で, 上記の第一凸体定理の証明を繰り返すような論法である. C. L. Siegel は, 証明を正確に記述するために新たな関数を導入したが, ここではその関数を用いずに, 補題3.1を適用して証明する議論の概要を述べる.

逐次最小近似 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ を定義するときの一次独立な格子点 $\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_n$ を, $\mathbf{g}_j \in \lambda_j \mathfrak{B}$ $(1 \leq j \leq n)$ を満たすものとして取る. J を $2 \leq J \leq n$ を満たす添字とする. また, $\lambda < \lambda_J$ を満たす $\lambda\mathfrak{B}$ に属する格子点を $\mathbf{g}$ とする. このとき $\mathbf{g}$ は $\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_{J-1}$ の実数係数一次結合で表されることが示せる [6, Lemma 1B].

第二凸体定理は, 行列式を用いた体積表示を用いながら, この議論を帰納的に繰り返すこととによって示される.

6. 今後の課題

幾何学的な方法を用いて, 数論に関する諸性質を考察する数の幾何学の主定理である Minkowski の第一凸体定理, 第二凸体定理の内容と証明の概略を上記で述べた. 今後はこれらの二定理や, L. Kronecker の近似定理, 及び数の幾何学の証明方法を活用した, 有理数と無理数の違いを明らかにする図形の表示に関し, 新たな知見等を考究したいと考えている.

7. 参考文献

[1] H. F. Blichfeldt, *A new principle in the geometry of numbers, with some applications*, Trans. Amer. Math. Soc., **15**, (1914), 227–235.

[2] G. H. Hardy and E. M. Wright, *An introduction to the Theory of Numbers*, Oxford Univ. press, 3^{rd} ed., 1954.

[3] H. Minkowski, *Geometrie der Zahlen*, Chelsea Publishing Company, 1896.

[4] L. J. Mordell, *On arithmetical results in the geometry of numbers*, Compositio Math., **1**, (1935), 248–253.

[5] C. L. Siegel, *Lecture on the Geometry of Numbers*, Springer, 1989.

[6] W. M. Schmidt, *Diophantine approximation*, Lecture Notes in Math., **785**, Springer, 1980.

[7] W. M. Schmidt, *Diophantine approximation and Diophantine Equations*, Lecture Notes in Math., **1467**, Springer, 1991.