P-13

順序数を用いた正規化定理の証明

A proof of the Normalization Theorem using ordinal numbers

○岩元耀摩 [1]
Yoma Iwamoto[1]

Abstract: We give a proof of the Normalization Theorem in system T by introducing the notion of “ ordinal numbers ”. This method is more intuitive than the proof using “ reducibility ”.

1. はじめに

数理論理学は, 形式化された論理や計算の構造と, それらが数学的体系とどのように関係するかを研究する数学の一分野である. 初期には数学の基礎付けを目指したが, 現代ではプログラミング言語の設計や検証など, 計算機科学でも重要な役割を果たしている. 特に型理論は論理と計算を統一的に扱う枠組みであり, 型を通じて計算の正当性を保証している.

型理論において正規化定理は, 全ての型付き項の計算が有限のステップで終了し, 正規形に簡約されることを保証する重要な定理であり, これにより論理体系の健全性が担保される.

本稿では, 簡約可能性に基づく証明ではなく, 順序数を用いた正規化定理の証明を提示し, 計算の停止性をより直感的かつ明確に示すアプローチを採用する.

2. システム T ついて

システム T は, クルト・ゲーデルが提案した計算体系で, 特に自然数に基づいた原始再帰操作を型理論に取り入れた重要なシステムである. システム T の主な要素は, 自然数型 o とその項である「0」と後者関数 $\mathscr{S}$ である. また, システム T には, 関数を指定回数だけ繰り返す反復合成作用素 J_τ もあり, 自然数に依存しない反復演算を行う.

さらに, システム T の正規化定理は, Church-Rosser の定理と合わせて, 全ての計算が有限回で一意の正規形に簡約されることを保証する. これにより, 型理論における計算の信頼性を確立する重要な役割を果たしている.

3. 型の帰納的な定義

記号 o は型（自然数の型）である.

もし σ と τ が型であれば, $(\sigma)\tau$ も型である.

（$(\sigma)\tau$ は型 σ から型 τ への特定の写像の型を示す）.

簡潔に表記するために, σ が単一の記号で書かれた場合に, $(\sigma)\tau$ を $\sigma\tau$ と書く. 上記の定義より, o 以外のすべての型は $\tau_1...\tau_n$ $(n \geq 1)$ の形を持っている.

4. 項およびその型の帰納的な定義

原始的な項として以下を取る:

- 各型 τ の変数は可算無限個あり, それぞれ型 τ の項
- 算術の原始項 0 は型 o の項
- 算術の原始項 $\mathscr{S}$ は型 oo の項
- 組み合わせ子 $K_{\sigma\tau}$ は型 $\tau\sigma\tau$ の項
- 組み合わせ子 $S_{\rho\sigma\tau}$ は型 $(\rho\sigma\tau)(\rho\sigma)\rho\tau$ の項
- イテレータ J_τ は型 $o(\tau\tau)\tau\tau$ の項
- $a^{\sigma\tau}$ と b^σ が型 $\sigma\tau$ および σ の項であれば, $a^{\sigma\tau}(b^\sigma)$ は型 τ の項

簡潔に表記するために, b^σ が合成項として書かれていない場合, $a^{\sigma\tau}(b^\sigma)$ を $a^{\sigma\tau}b^\sigma$ と書く.

5. 数字の帰納的な定義

数字 N_n $(n \in \mathbb{N})$ の帰納的な定義は次の通り:

$$N_0 := 0$$
$$N_{n+1} := \mathscr{S} N_n$$

これらの数字は型 o の特別な項.

6. reduction の定義

6.1　項の簡約

定義:　項が以下の 3 つの形のいずれかである場合, その項は「開いている」と言う.

1. $K_{\sigma\tau}a^\tau b^\sigma d_1^{\tau_1}...d_m^{\tau_m}$
2. $S_{\rho\sigma\tau}a^{\rho\sigma\tau}b^{\rho\sigma}c^\rho d_1^{\tau_1}...d_m^{\tau_m}$
3. $J_\tau N_n a^{\tau\tau}b^\tau d_1^{\tau_1}...d_m^{\tau_m}$

各場合で $\tau = \tau_1...\tau_{m+1} (m \geq 0)$ であり, 項は型 τ_{m+1} .

1: 日大理工・院 (前)・数学

6.2　項の簡約可能性の帰納的な定義

- 部分項として開いている項がある場合, 簡約可能.

$a^\tau \triangleright^1 b^\tau$（「項 a^τ が b^τ に 1 ステップで簡約される」）の帰納的な定義:　多くの場合があるが, 例として, $\tau = \tau_1...\tau_{m+1}$ $(m \geq 0)$ のとき,

- $K_{\sigma\tau} a^\tau b^\sigma d_1^{\tau_1}...d_m^{\tau_m} \triangleright^1 a^\tau d_1^{\tau_1}...d_m^{\tau_m}$
- $J_\tau N_{n+1} a^{\tau\tau} b^\tau d_1^{\tau_1}...d_m^{\tau_m} \triangleright^1 a^{\tau\tau}(J_\tau N_n a^{\tau\tau} b^\tau) d_1^{\tau_1}...d_m^{\tau_m}$

7. 順序数について

定理 1　各順序数項 $\alpha \neq 0$ に対して, $\alpha = \omega^{\alpha_1} + \cdots + \omega^{\alpha_n}$ となるような一意な $\alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_n$ $(n \geq 1)$ が存在する.

この定理より, 任意の順序数項 $\alpha \neq 0$ に対して,
　$\alpha_1 \geq ... \geq \alpha_n$ $(n \geq 1)$.
　よって, $\alpha = \omega^{\alpha_1} + \cdots + \omega^{\alpha_n}$ となる一意に決定された順序数項が存在する.
　したがって, $\alpha_i < \epsilon_0$ ならば $\alpha < \epsilon_0$ となる.

順序数項の自然和と自然積　:
　順序数の通常の和と積とは異なる自然和 $\times$ と自然積 $\#$ が定義でき, これを項への順序数の割り当てに用いる.

8. 項に順序数項を割り当てる方法

型 τ の次数 $g\tau$ の帰納的定義：

1. $go := 0$
2. $g(\sigma\tau) := \max(g\sigma + 1, g\tau)$

型の次数は自然数である.

各項 a^τ と自然数 i に対する順序数項 $[a^\tau]_i$ の帰納的定義：

1. a^τ が変数または算術基本項 0 または $\mathscr{S}$ である場合, すべての $i \in \mathbb{N}$ に対して $[a^\tau]_i := 0$
2. α^τ が型 τ の組み合せ子である場合,
$$[a^\tau]_i := \begin{cases} 1 & \text{if } i \leq g\tau \\ 0 & \text{if } i > g\tau \end{cases}$$
3. J_ρ が型 $\tau = o(\rho\rho)\rho\rho$ のイテレータである場合,
$g\tau = g\rho + 2$ で,
$$[J_\rho]_i := \begin{cases} 1 & \text{if } i \leq g\rho + 1 \\ \omega & \text{if } i = g\rho + 2 \\ 0 & \text{if } i > g\rho + 2 \end{cases}$$
$$[J_\rho N_n]_i := \begin{cases} 1 & \text{if } i \leq g\rho + 1 \\ n & \text{if } i = g\rho + 2 \\ 0 & \text{if } i > g\rho + 2 \end{cases}$$
4. 項 $a^{\sigma\tau} b^\sigma$ が $J_\rho N_n$ の形を持たない場合,
$$[a^{\sigma\tau} b^\sigma]_i := \begin{cases} 2^{[a^{\sigma\tau} b^\sigma]_{i+1}} \times ([a^\sigma]_i \# [b^\sigma]_i) & \text{if } i \leq g\rho + 1 \\ [a^\sigma]_i & \text{if } i > g\rho + 2 \end{cases}$$

　この最後の規則は帰納的であり, $[ab]_{g\sigma+1} = [a]_{g\sigma+1}$ から始まり, $g\sigma - i$ に関する帰納法によって $i \leq g\sigma$ の場合の $[ab]_i$ が決定される.

9. 順序数を用いた T の正規化定理の証明

　項の順序の評価:
　項 a^τ の順序を, 順序数項 $[a^\tau]_0$ で表す.
　$[a^\tau] < [b^\tau]$ は,
　$[a^\tau]_0 < [b^\tau]_0$ かつ $i \leq g\tau$ に対して $[a^\tau]_i \leq [b^\tau]_i$
　を意味する.

補題 2　1 回で a^τ が b^τ に簡約されるならば, $[a^\tau]_0 < [b^\tau]_0$

　この補題を示すには, 例えば以下を示せばよい.

- $[a^\tau] < [K_{\sigma\tau} a^\tau b^\sigma]$
- $[a^{\tau\tau}(J_\tau N_n a^{\tau\tau} b^\tau)] < [J_\tau N_{n+1} a^{\tau\tau} b^\tau]$

結果として, 以下の定理を得る.

定理 3　$a_1^\tau \triangleright^1 a_2^\tau$ ならば $[a_2^\tau]_0 < [a_1^\tau]_0$.

定理 4 (正規化定理)　すべての項には正規形が存在する.

　証明:
順序数 α に関して次の命題を帰納法で証明する:
　「すべての項 a^τ について, $\alpha = [a^\tau]_0$ ならば, a^τ は正規形を持つ」.

1. (a^τ がすでに正規形の場合)
この場合は明らかに成立する.
2. (a^τ が正規形でない場合)
$a^\tau \triangleright^1 a_1^\tau$ となる項 a_1^τ が存在し, 定理 1 より $[a_1^\tau]_0 < [a^\tau]_0$ となる. 帰納法の仮定により, $[a_1^\tau]_0 < \alpha$ なので, a_1^τ は正規形を持つ. したがって, $a^\tau \triangleright^1 a_1^\tau$ より, a^τ も正規形を持つ.

　以上により, すべての項に正規形が存在することが示された.

□

10. 参考文献

[1] Kurt Schütte. Proof theory. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 225, Springer-Verlag, Berlin-New York, (1977)

[2] Jean-Yves Girard; Paul Taylor; Yves Lafont. Proofs and types. Cambridge University Press, Cambridge, (1989)