

数論的関数の漸近評価における応用
Applications of arithmetic functions and applications in asymptotic estimates

○石塚匠

*Takumi Ishizuka

Abstract: In this article, we explain how Euler's totient function and Riemann's zeta function play an important role in asymptotic estimates in number theory. Relying on fundamental properties of these functions, we present a proof of a known result giving a probability for rational integers to be relatively co-prime.

1. はじめに

本稿においては Euler's totient function 及び Riemann's zeta function の定義と漸近評価に関する性質を述べ、それらを用いて正整数が互いに素になる確率について論ずる。有理整数全体の成す環を \mathbb{Z} , 正の有理整数の集合を \mathbb{N} , 実数全体の成す体を \mathbb{R} と記する。

2. Euler's totient 関数

定義 2.1 (Euler's totient 関数 φ). $n \in \mathbb{N}$ に対し, $1, \dots, n$ のうち n と互いに素つまり最大公約数 1 となる正整数の個数を $\varphi(n)$ と書く. $\varphi(n)$ を Euler's totient 関数という.

定義 2.2 (Riemann's zeta 関数). $1 < s \in \mathbb{R}$ で収束する Riemann's zeta 関数 $\zeta(s)$ は以下で定義される.

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots \quad (1)$$

補題 2.1. n を割り切る素数 $2 \leq p | n$ に対し,

$$\varphi(n) = n \prod_{p|n} (1 - p^{-1}) \text{ が成立.}$$

また以下の無限積は収束して, $\zeta(s)$ は Euler 積表示:

$$\zeta(s) = \prod_{\text{全ての素数 } p \geq 2} \frac{1}{1 - p^{-s}} \text{ をもつ.}$$

定義 2.3 (Möbius 関数). 正整数 $n \in \mathbb{N}$ に対し, 次のように定義される関数 $\mu(n)$ を Möbius 関数という.

- (1) $\mu(1) = 1$,
- (2) $n \geq 2$ が 1 より大きい平方因数を持つとき $\mu(n) = 0$,
- (3) 相異なる素数 p_1, p_2, \dots, p_k に対し

$$\mu\left(\prod_{j=1}^k p_j\right) = (-1)^k.$$

定義 2.4 (乗法的関数). 一般に \mathbb{N} で定義される関数 f が乗法的関数 (乗法的な数論的関数) であるとは, 互いに素な $m, n \in \mathbb{N}$ に対して $f(mn) = f(m)f(n)$ が成立するときをいう.

補題 2.2.

(1) φ, μ は乗法的関数.

$$(2) \sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 0 & n > 1. \end{cases}$$

定理 2.1 (Möbius の反転公式). $f(n)$ を乗法的関数とする.

$$g(n) = \sum_{d|n} f(d) \text{ とおくと}$$

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu(d)g\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right)g(d).$$

Proof.

$$\begin{aligned} \sum_{d|n} \mu(d)g\left(\frac{n}{d}\right) &= \sum_{d|n} \mu(d) \sum_{c|\frac{n}{d}} f(c) \\ &= \sum_{cd|n} \mu(d)f(c) = \sum_{c|n} f(c) \sum_{d|\frac{n}{c}} \mu(d). \end{aligned}$$

補題 2.2 (2) より $n = c$ のとき $\sum_{d|n} \mu(d) = 1$, $\frac{n}{c} > 1$ のとき

$$\sum_{d|n} \mu(d) = 0.$$

$$\therefore \sum_{c|n} f(c) \sum_{d|\frac{n}{c}} \mu(d) = \sum_{n|n} f(n) = f(n).$$

$f(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right)g(d)$ も同様に成立する. □

補題 2.3. 以上より次の性質も従う.

$$\varphi(n) = n \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d} = \sum_{d|n} d\mu\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{dd'=n} d'\mu(d).$$

定義 2.5 (Landau 記号 O, o 及び \sim). \mathbb{R} から \mathbb{R} への関数 $f(X), g(X)$ ($X \in \mathbb{R}$) に対し, X に依存しない $0 < C \in \mathbb{R}$ が存在して $\left|\frac{f(X)}{g(X)}\right| \leq C$ ($|X| \rightarrow \infty$) となるとき $f = O(g)$, また $\left|\frac{f(X)}{g(X)}\right| \rightarrow 0$ ($|X| \rightarrow \infty$) となるとき, $f = o(g)$, $\left|\frac{f(X)}{g(X)}\right| \rightarrow 1$ ($|X| \rightarrow \infty$) のとき $f \sim g$ と記する.

有名な Basel 問題の答として次が成立する.

補題 2.4.

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

定理 2.2.

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$$

Proof. Euler 積表示 $\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}$ より,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta(s)} &= \prod_p (1-p^{-s}) \\ &= \prod_p (1 + \mu(p)p^{-s} + \mu(p^2)p^{-2s} + \dots) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n)n^{-s} (\because \mu \text{ は乗法的}). \end{aligned}$$

3. 2 個の正整数が互いに素になる漸近的確率

定理 3.1. $n \in \mathbb{N}$ に対して

$\Phi(n) = \varphi(1) + \varphi(2) + \dots + \varphi(n)$ と定めると

$$\Phi(n) = \frac{3n^2}{\pi^2} + O(n \log n) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Proof. 補題 2.3 より

$$\begin{aligned} \Phi(n) &= 1 \sum_{d|1} \frac{\mu(d)}{d} + 2 \sum_{d|2} \frac{\mu(d)}{d} + \dots + n \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d} \\ &= \sum_{m=1}^n m \sum_{d|m} \frac{\mu(d)}{d} = \sum_{d' \leq n} d' \mu(d) \\ &= \sum_{d|n} \mu(d) \sum_{d'=1}^{[n/d]} d' = \frac{1}{2} \sum_{d=1}^n \mu(d) \left(\left[\frac{n}{d} \right]^2 + \left[\frac{n}{d} \right] \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{d=1}^n \mu(d) \left\{ \frac{n^2}{d^2} + O\left(\frac{n}{d}\right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} n^2 \sum_{d=1}^n \frac{\mu(d)}{d^2} + O\left(n \sum_{d=1}^n \frac{1}{d}\right) \text{ である } (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

ここで各無限和が収束する場合に, 和 $\sum_{d=1}^n$ を $\sum_{d=1}^{\infty} - \sum_{d=n+1}^{\infty}$

とみなすと

$$\begin{aligned} \sum_{d=1}^n \mu(d) \frac{n^2}{d^2} &= n^2 \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} + O\left(n^2 \sum_{d=n+1}^{\infty} \frac{1}{d^2}\right) \\ &= \frac{n^2}{\zeta(2)} + O(n) \end{aligned}$$

加えて

$$\begin{aligned} O\left(n \sum_{d=1}^n \frac{1}{d}\right) &= O\left(n \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)\right) \\ &= O(n \log n) \end{aligned}$$

従って, 補題 2.4 を用いると

$$\begin{aligned} \Phi(n) &= \frac{1}{2} n^2 \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} + O(n \log n) + O\left(n^2 \sum_{d=n+1}^{\infty} \frac{1}{d^2}\right) \\ &= \frac{n^2}{2\zeta(2)} + O(n) + O(n \log n) \\ &= \frac{3n^2}{\pi^2} + O(n \log n) \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

□

$n \in \mathbb{N}$ を固定する. 分母分子がそれぞれ n 以下の既約分数の個数は $\Phi(n) + 1$ であることから以下が成立する.

定理 3.2. 2 個の正整数が互いに素になる漸近的確率は $\frac{6}{\pi^2}$ に等しい.

Proof. 任意の 2 つの正整数 $a, b \in \mathbb{N}$ が互いに素ということとは, その比 $\frac{a}{b}$ が既約分数であることを指す.

即ち $\frac{a}{b}$ が既約分数になる漸近的確率を求めれば良い.

$n \in \mathbb{N}$ に対し $b > 0, 1 \leq a \leq b \leq n$ を満たす正整数の組 (a, b) と比 $\frac{a}{b}$ を考える. このような $\frac{a}{b}$ の個数を ψ_n とおくと $\psi_n \sim \frac{1}{2} n^2$ である. また $\frac{a}{b}$ のうちの既約分数の個数を χ_n とおくと

$$\chi_n = \Phi(n).$$

従って p と q が互いに素である漸近的確率は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\chi_n}{\psi_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Phi(n)}{\frac{1}{2} n^2} = \frac{1}{\zeta(2)} = \frac{6}{\pi^2}.$$

□

4. 今後の課題

本稿では互いに素な正整数 2 個に関する漸近的な確率を計算した. $k \geq 3$ とする. $1 \leq a_1 \leq \dots \leq a_k \leq n$ を満たす正整数の k 個の組のうち, その全てを同時に割り切る素数が存在しないときに, これら a_1, \dots, a_k は互いに素になるという. この漸近的な確率を同様に考えることが可能である.

これらを活かし, 今後の課題としては多項式への拡張, 及び数論への応用も目指したい.

5. 参考文献

[1] G. H. Hardy and E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford Univ. Press, 3rd ed., 1954.
 [2] J. E. Nymann, *On the probability that k positive integers are relatively prime*, J. Number Theory, **4**, (1972), 469–473.
 [3] A. Yukié, *初等整数論から p 進数へ*, 日本評論社, 2022.