

ラテン方阵の Transversal について About Transversal in Latin Square

○黒木 天也¹
*Takaya Kurogi¹

Abstract: In this paper, we introduce Latin square. We also discuss transversal in Latin square.

1. ラテン方阵

定義 1 ラテン方阵とは、 n 行 n 列の方阵を n 個の記号で埋め、各行各列に各記号がちょうど 1 回ずつ現れるようにしたものである。

例 2 有限群の乗法表はラテン方阵となっている。ここで、次数 n のラテン方阵の行と列は、ともに次数 n の群 G によってインデックスされ、各項目は行と列の積である。

\	e	a	b	ab
e	e	a	b	ab
a	a	e	ab	b
b	b	ab	e	a
ab	ab	b	a	e

図 1: 有限群の乗法表

例 3 ラテン方阵には数独という 9×9 が一般的な、1 から 9 の数字を行、列、ブロック (3×3) でちょうど 1 回ずつ現れるようにして方阵を完成させるゲームがある。

	3	6		4	9	8		7		1	3	6	5	4	9	8	2	7
	4		6		2		3			8	4	9	6	7	2	5	3	1
5		2	8	3			4	9		5	7	2	8	3	1	6	4	9
9	6		2	8		7	5	3		9	6	1	2	8	4	7	5	3
	5	7	3					8		4	5	7	3	9	6	2	1	8
3		8		5	7	4	9	6		3	2	8	1	5	7	4	9	6
7	8		4		5	9	6	2		7	8	3	4	1	5	9	6	2
2	9	4	7		3		8	5		2	9	4	7	6	3	1	8	5
6		5	9	2	8		7	4		6	1	5	9	2	8	3	7	4

図 2: 数独

2. Transversal

定義 4 ラテン正方形の *partial transversal* とは、行も列も記号も共有しないマスの集まりのことで、*full transversal* とは、すべての記号をちょうど一度ずつ含むマスのことである（単に *transversal* と呼ばれることもある）。

1	3	2	6	5	4	1	2	3	4	5	6
4	6	5	3	2	1	2	3	4	5	6	1
3	2	4	5	1	6	3	4	2	6	1	5
2	4	3	1	6	5	4	5	6	1	2	3
6	5	1	2	4	3	5	6	1	2	3	4
5	1	6	4	3	2	6	1	5	3	4	2

図 3: 左が partial transversal。右が full transversal。

補題 5 Hall-Paige 条件 [1]

G' が G の交換子部分群の場合、 G をアーベル化した $G^{ab} = G/G'$ において $\sum_{x \in G} x = 0$ である。

予想 6 Hall-Paige 予想 [1]

任意の有限群 G に対して、 $L(G)$ が *full transversal* を持つことは、 G が Hall-Paige 条件を満たすことと同値である。ここで $L(G)$ は G の乗法表に対応するラテン方阵である。

この予想は、2009 年に Wilcox, Evans and Bray によって証明された。

予想 7 Ryser-Brauldi-Stein 予想 [1]

すべての次数 n のラテン方阵は少なくとも、 $n - 1$ 個のセルの *partial transversal* を持ち、 n が奇数の時、*full transversal* を持つ。

この予想の弱い予想は、証明されている。

すべての次数 n のラテン方阵は少なくとも、

- $\frac{2n}{3}$ 個のセルの *partial transversal* を持つ。
- $\frac{3n}{4}$ 個のセルの *partial transversal* を持つ。
- $n - \sqrt{n}$ 個のセルの *partial transversal* を持つ。
- $n - O(\log^2 n)$ 個のセルの *partial transversal* を持つ。
- $n - O(\frac{\log n}{\log \log n})$ 個のセルの *partial transversal* を持つ。
- $n - 1$ 個のセルの *partial transversal* を持つ。

3. 参考文献

- [1] Richard Montgomery. *Transversals in Latin Squares*.
<https://arxiv.org/abs/2406.19873>, 2024

1: 日大理工・院(前)・数学