P-4

# 正多面体の回転対称群と SO(3) の有限部分群

**Rotational symmetry group of regular polyhedra and finite subgroup of SO(3)**

○遠藤暸[1], 橋口徳一[2]
*Akira Endo[1], Norikazu Hashiguchi[2]

Abstract: We will explain the rotational symmetry of a polyhedron with a finite number of vertices, edges, and faces contained in a three-dimensional space. Also, explain what kind of groups to create. Here are five examples. After that, we will give the definition of SO(3) and prove that there are only five types of finite subgroups.

## 1. 回転対称群

F $\subset \mathbb{R}^3$ を有限個の頂点, 辺, 面をもつ多面体とする. $\mathbb{R}^3$ の合同変換 T が F を不変にするとは, T による F の像が F と一致するときである. 合同変換 T で F を不変にするもの全体 G を F の**合同変換群**という. この G には不動点 $x_0 \in \mathbb{R}^3$ があり, 平行移動により $x_0 = 0 \in \mathbb{R}^3$ と仮定してよい. そのとき, T は直交変換であり, 鏡映, 回転, 回転鏡映のいずれかである. 行列式に注目すると, 鏡映と回転鏡映の行列式は $-1$ であるから, G に含まれる回転の全体 R は, 行列式が 1 のものの全体に一致し, G の部分群をつくる. R は図形 F の**回転対称群**と呼ばれる.

## 2. 回転対称群 R の例

例 1　F を $z$ 軸を対称軸とする正 $n$ 角錐とする. $z$ 軸に関する $\frac{2k\pi}{n}$ 回転を $\rho_{\frac{k}{n}}$ とすると, 正 $n$ 角錐の回転対称群は

$$C_n = \{\rho_{\frac{k}{n}} \mid k = 0, 1, 2, \ldots, n-1\}$$

例 2　F を $z$ 軸を対称軸とする正 $n$ 角柱とする. 側面の中心または縦辺の中点を通り, $z$ 軸と垂直に交わる直線は線対称軸である. これらの変換は $n$ 個あり, 順に $\tau_0$ , $\tau_1$ , ..., $\tau_{n-1}$ とおく. 正 $n$ 角柱の回転対称群は $\rho_{\frac{k}{n}}$ と合わせて

$$D_n = \{\rho_{\frac{k}{n}} \mid k = 0, 1, 2, \ldots, n-1\} \cup \{\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_{n-1}\}$$

この群を**二面体群**という.

例 3　F を正四面体とする. 面の中心を通る回転対称軸があり, それは反対側の頂点を通る. 回転対称軸は 4 つあり, それぞれにつき回転角が $\frac{2\pi}{3}$ , $\frac{4\pi}{3}$ の 2 つあるから, 回転対称変換は 8 つある. 他に, 辺の中点を通る線対称がある. 辺は 6 本で 2 本ずつ相対する辺の対をつくっている. よって, 線対称変換は 3 つある. 恒等変換と合わせて 12 個の回転対称変換が得られ, 群をつくる. この群を**四面体群**といい, $T_{12}$ で表す.

例 4　F を立方体とする. 回転軸は次の通り.

- 面の中心を通るものは 3 本で, 回転角はそれぞれ $\frac{\pi}{2}$ , $\pi$ , $\frac{3\pi}{2}$ の 3 通り.
- 辺の中点を通るものは 6 本で, 回転角は $\pi$.
- 頂点を通るものが 4 本で, 回転角はそれぞれ $\frac{2\pi}{3}$ , $\frac{4\pi}{3}$ の 2 通り.

恒等変換と合わせて 24 個の回転対称変換が得られ, 群をつくる. この群を**八面体群**といい, $O_{24}$ で表す. なお, 双対性により正八面体と立方体の回転対称群は同じである.

例 5　F を正二十面体とする. 回転軸は次の通り.

- 頂点を通る軸は 6 本で, 回転角はそれぞれ $\frac{2\pi}{5}$ , $\frac{4\pi}{5}$ , $\frac{6\pi}{5}$ , $\frac{8\pi}{5}$ の 4 通り.
- 辺の中点を通る軸は 15 本で, 回転角は $\pi$.
- 面の中心を通る軸は 10 本で, 回転角はそれぞれ $\frac{2\pi}{3}$ , $\frac{4\pi}{3}$ の 2 通り.

恒等変換と合わせて 60 個の回転対称変換が得られ, 群をつくる. この群を**二十面体群**といい, $I_{60}$ で表す. なお, 正二十面体と正十二面体はたがいに双対である. したがって, 同じ対称性をもつ.

## 3. SO(3) の有限部分群

行列式が 1 の 3 次直交行列全体の集合を SO(3) で表す. これは, 直交行列全体のつくる群の部分群である. その各元は空間の回転を導く. したがって, 回転対称群は SO(3) の部分群を定める.

**定理 1.** SO(3) の有限部分群は巡回群 $C_n$ , 二面体群 $D_n$ , 四面体群 $T_{12}$ , 八面体群 $O_{24}$ , 二十面体群 $I_{60}$ のいずれかに同型である.

〈 証明の方針 〉

$G \subset$ SO(3) を有限部分群とする. $G$ の $\mathbb{R}^3$ 上の作用はノルムを保つから, 単位球面 $S^2$ 上に作用する. $G$ の自明でない元 $g$ は $S^2$ の回転 $T_g$ を定める. 回転 $T_g$ の軸と $S^2$ の交点は 2 点あり, それらを $T_g$ の極と呼ぶ. $g$ が $G$ の自明でない元全体を動くときの極全体の集合 $X$ を考える.

$$X = \{x \in S^2 \mid gx = x \text{ となるような } g \in G - \{e\} \text{ が存在する}\}$$

$X$ は有限集合で, 極は $\pm x$ の形の対で含まれるから,

1: 日大理工・院 (前)・数学　2: 日大理工・教員・数学

$X = -X$ である. 以下, 極点集合 $X$ に関する補題を準備し, その後に定理の証明を行う.

**補題 2.** $G$ は $X$ に作用する. すなわち, $T_g(X) = X\ (g \in G)$ である.

**定義 3.** $G$ が $X$ に作用しているとき, 点 $x \in X$ に対して, $X$ の部分集合

$$G(x) = \{gx \mid g \in G\}$$

を $G$ 作用による $x$ の**軌道**という. 軌道 $G(x)$ の元の個数 $|G(x)|$ を軌道の長さという. また, $G$ の部分群

$$G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$$

を点 $x$ での**等方部分群**という.
$X$ は $G$ 作用により, いくつかの軌道に分かれる. 軌道の個数を $N$ とし, $G(x_1)$ , $G(x_2)$ ,..., $G(x_N)$ を軌道とする.

**定理 4.** 次の式が成り立つ.

$$|G(x_i)| = \frac{|G|}{|G_{x_i}|}$$

**補題 5.** 各 $x \in X$ に対し, 等方部分群 $G_x$ は $\pm x$ を通る軸に関する回転からなる有限群である. そのうち, 回転角が正の最小のものを $g$ とすれば, $G_x$ は $g$ で生成される巡回群である. すなわち, その位数を $n$ とすると

$$G_x = \{e, g, g^2, \ldots, g^{n-1}\}$$

と表される.

**補題 6.** (バーンサイドの公式)
軌道の個数 $N$ は $g \in G$ が $G$ 全体を動くときの不動点の個数の平均である.

$$N = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G}|X^g| \quad ここで, X^g = \{x \in X \mid gx = x\}$$

**定理 1 の証明**. $G$ の自明でない各元 $g$ に対し, $|X^g| = 2$ である. また, $e \in G$ に対し, $|X^g| = |X|$ である. よって, バーンサイドの公式より

$$N = \frac{1}{|G|}\{|X| + 2(|G| - 1)\}$$

また, $|X| = \sum_{i=1}^{N}|G(x_i)| = \sum_{i=1}^{N}\frac{|G|}{|G_{x_i}|}$ であるから,

$$2(1 - \frac{1}{|G|}) = \sum_{i=1}^{N}(1 - \frac{1}{|G_{x_i}|})$$

左辺は 1 以上 2 未満, 右辺の各項は $\frac{1}{2}$ 以上 1 未満なので, $N = 1$ はなく, $N$ は 2 か 3 である.

<u>場合 1 ($N = 2$ のとき)</u>
上式に $N = 2$ を代入して, 整理すると

$$2 = |G(x_1)| + |G(x_2)|$$

となるから, $X$ は 2 点で, $x_1$ も $x_2$ も固定点である.
$x_2 = -x_1$ である. $G$ の元は, すべて, $\pm x_1$ を通る共通の軸に関する回転である. **補題 5** より $G$ は位数 $n$ の巡回群 $C_n$ である.

<u>場合 2 ($N = 3$ のとき)</u>
$|G| = g$ , $|G_{x_1}| = a$ , $|G_{x_2}| = b$ , $|G_{x_3}| = c$ とおく. $a \le b \le c$ と仮定してよい. 上式に代入して整理すると

$$1 + \frac{2}{g} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

左辺は 1 より大きいので,$(a, b, c, g)$ の起こりうる場合は次の 4 通りだけである.

① $(2, 2, n, 2n)\quad(n \ge 2)$
② $(2, 3, 3, 12)$
③ $(2, 3, 4, 24)$
④ $(2, 3, 5, 60)$

<u>場合 3 ($N = 3$ , $(a, b, c) = (2, 2, 2)$ のとき)</u>
位数がどれも 2 であるから, 単位元 $e$ と自明でない元 $g_1$ , $g_2$ , $g_3$ からなる. これらはベクトル $x_1$ , $x_2$ , $x_3$ を通る軸に関する $\pi$ 回転である. $x_1$ , $x_2$ , $x_3$ はたがいに直交し, 位数 4 の二面体群 $D_2$ である.

<u>場合 4 ($N = 3$ , $(a, b, c) = (2, 2, n)$ , $n \ge 3$ のとき)</u>
3 つの軌道の長さは $n$ , $n$ , 2 であり, $G_{x_3}$ は位数 $n$ の巡回群である. その生成元を $d$ とおく. $x_3$ の軌道は $\{\pm x_3\}$ である. ここで, $G_{x_1}$ の自明でない元を $h$ とすると, $hx_3 = -x_3$ である. $h$ は $x_1$ を通る軸に関する $\pi$ 回転であるから, $x_1$ と $x_3$ は直交する. よって, $d$ と $h$ は位数 $2n$ の二面体群 $D_n$ を生成する. $G = D_n$ である.

<u>場合 5 ($N = 3$ , $(a, b, c) = (2, 3, 3)$ のとき)</u>
軌道の長さはそれぞれ 6 , 4 , 4 である. 長さ 4 の $x_3$ の軌道に着目する. $G_{x_3}$ の位数は 3 で, その生成元 $d$ は $x_3$ を通る軸に関する $\frac{2\pi}{3}$ 回転である. $x_3$ の軌道は $\pm x_3$ と異なる点 $y$ を含む. すると, $x_3$ の軌道は $\{x_3, y, dy, d^2y\}$ で, 正四面体の 4 頂点である. よって, $G$ は四面体群 $T_{12}$ と一致する.

<u>場合 6 ($N = 3$ , $(a, b, c) = (2, 3, 4)$ のとき)</u>
軌道の長さはそれぞれ 12 , 8 , 6 である. 長さ 6 の軌道に着目する. $G_{x_3}$ は位数 4 の巡回群で, その生成元 $d$ は $x_3$ を通る軸に関する $\frac{\pi}{2}$ 回転である. $x_3$ の軌道は $\pm x_3$ と異なる点 $y$ を含む. $x_3$ の軌道は $-x_3$ を含み, 残りの 4 点は正方形で, $x_3$ からも, $-x_3$ からも等距離にある. 軌道 $\{x_3, y, dy, d^2y, d^3y, -x_3\}$ は正八面体の 6 頂点である. よって, $G$ は八面体群 $O_{24}$ と一致する.

<u>場合 7 ($N = 3$ , $(a, b, c) = (2, 3, 5)$ のとき)</u>
軌道の長さはそれぞれ 30 , 20 , 12 である. 長さ 12 の軌道に着目する. $G_{x_3}$ は位数 5 の巡回群で, その生成元 $d$ は $x_3$ を通る軸に関する $\frac{2\pi}{5}$ 回転である. $x_3$ の軌道は 12 個あり, その中から $\pm x_3$ と異なる点のうち, もっとも $x_3$ に近いもの $y$ を選ぶ. 同様に $-x_3$ と異なる点 $z$ を選ぶ. $x_3$ の軌道は $-x_3$ を含み, 残りは $\pm x_3$ を軸とする $\frac{2\pi}{5}$ 回転で不変な 2 つの正五角形からなる. $z$ を取り直して, $z = -y$ とすることができる. その結果, 軌道 $\{x_3, y, dy, d^2y, d^3y, d^4y, -y, -dy, -d^2y, -d^3y, -d^4y, -x_3\}$ は正二十面体の頂点をなす. よって, $G$ は二十面体群 $I_{60}$ と一致する.

□

参考文献: 川崎徹郎 , ”文様の幾何学” , 牧野書店