P-5

粘菌の動きを表す偏微分方程式系とリアプノフ関数

Systems of partial differential equations related to the motion of slime mold and the Lyapunov function

○柏木 龍二 [1]
*Ryuji Kashiwagi[1]

Abstract: We consider several systems of partial differential equations which express the motion of slime mold. First, we explain a model that Keller and Segel derived. Next, we show the simplified model studied by Senba. Finally, we investigate and reconstruct the model from the point of view of the existence of the Lyapunov function.

1. 序

Keller と Segel は [1] にて, アメーバのように動く単細胞生物である粘菌の動きに対する研究をした. まず個々の粘菌は, 誕生後すぐに散らばり食物源に向かう. 食物源を食べつくした個々の粘菌は一ヶ所に集まり, 多細胞生物のようになる. それらの粘菌は, 自分自身が生成する化学物質に引き寄せられることによって集まることが知られており, 粘菌は化学物質の多い方向に動くと考えられる. 一ヶ所に集まり多細胞生物のようになった粘菌は, 胞子を作る器官である子実体を形成し, 新たな粘菌を生む. そしてその粘菌がまた食物源に向かって動き出す. これが細胞性粘菌のライフサイクルである. 本講演では, このような走化性粘菌の動きを表す Keller と Segel によって導出された偏微分方程式と, その研究の発展に関する考察である. 偏微分方程式系の話をするための定義を示す.

定義 1.

$$\nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$$

をナブラという. $f \in C^1(\Omega)$ に対し,

$$\nabla f := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

を f の gradient(勾配) という. Ω 上の (C^1 級) ベクトル場 $\vec{F} = (F^1, F^2, \cdots, F^n) \colon \Omega \to \mathbb{R}$ に対して,

$$\nabla \cdot \vec{F} := \frac{\partial F^1}{\partial x_1} + \frac{\partial F^2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial F^n}{\partial x_n}$$

を $\vec{F}$ の divergence(発散) という.

定義 2. 関数 $u \colon \Omega \to \mathbb{R}$ に対し,

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$$

を Laplace 作用素という.

2. Keller-Segel 系

Keller と Segel は [1] にて, 粘菌と粘菌が生成する化学物質の濃度を未知関数とする, 以下の偏微分方程式系を導出した.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = -\nabla \cdot (D_1 \nabla v) + \nabla \cdot (D_2 \nabla u), \\ \tau \dfrac{\partial v}{\partial t} = -k(v)v + uf(v) + D_v \Delta v. \end{cases} \tag{1}$$

ただし, $k(v) = \frac{w_0 k_2 K}{1+Kv}, w = \frac{w_0}{1+Kv}, K = \frac{k_1}{k_{-1}+k_2}$ とする. u は粘菌の濃度, v は粘菌が生成したアクラシンという化学物質の濃度である. アクラシンは, 一匹の粘菌ごとに $f(v)$ の割合で生成されるとする. w はアクラシンを分解するアクラシナーゼと呼ばれる酵素の濃度である. アクラシンとアクラシナーゼは複合体 C(濃度 c) を形成する. そして複合体 C は遊離酵素と分解物に分離する. つまり, 以下のような化学反応をする.

$$v + w \underset{k_{-1}}{\overset{k_1}{\rightleftarrows}} C \xrightarrow{k_2} w + \text{分解物}.$$

k_1, k_{-1}, k_2 はこの化学反応の反応速度定数である. また, 酵素 (遊離酵素と結合酵素) の濃度は一定で w_0 とする. つまり, 以下の式を仮定する.

$$w + c = w_0.$$

D_1 は粘菌の流束に対するアクラシン勾配の影響の強さ, D_2 は個々の粘菌のランダム運動の大きさを表していて, D_v はアクラシンの拡散係数である.

3. 簡略化した問題

仙葉 [3] は式 (1) を, $D_1 = uS'(v), D_2 = 1, k(v) = 1, f(v) = 1, D_v = 1$ として簡略化した次の問題を考えた.

$$\begin{cases} u_t = \nabla \cdot (\nabla u - \chi u \nabla S(v)) & \text{in} \quad \Omega \times (0,T), \\ \tau v_t = \Delta v - v + u & \text{in} \quad \Omega \times (0,T), \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \dfrac{\partial v}{\partial \nu} = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega \times (0,T), \\ u(\cdot,0) = u_0, v(\cdot,0) = v_0 & \text{in} \quad \Omega. \end{cases} \tag{2}$$

1: 日大理工・院 (前)・数学

ここで, $\Omega \subset \mathbb{R}^n (n \geq 1)$ は, 滑らかな境界 $\partial\Omega$ をもつ有界領域とし, u_0, v_0 は Ω 上の正値で滑らかな関数とする. u, v は非負値の未知関数, τ は非負値定数, ν は境界 $\partial\Omega$ の外向単位法線ベクトルである. $S(v)$ は $(0, \infty)$ から $\mathbb{R}$ への滑らかな関数で, $S'(v) > 0$ とする. 条件 $S'(v) > 0$ は, アクラシンが誘引物質であることに対応している.

4. リアプノフ関数

式 (2) がリアプノフ関数 $\mathcal{F}$ をもつとは, (u, v) を式 (2) の解としたとき, $\frac{d}{dt}\mathcal{F}(u(t), v(t)) \leq 0$ をみたすことをいう. $S(v) = v$ とし, 関数 $\mathcal{F}, \mathcal{D}$ を,

$$\mathcal{F}(u,v) = \int_\Omega (u \log u - \chi uv) dx + \frac{\chi}{2}\int_\Omega (|\nabla v|^2 + v^2) dx, \quad (3)$$

$$\mathcal{D}(u,v) = \int_\Omega u|\nabla(\log u - \chi v)|^2 dx + \chi \int_\Omega \tau v_t^2 dx \geq 0 \quad (4)$$

とおくと, 以下の式が成り立つ.

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}(u(t), v(t)) + \mathcal{D}(u(t), v(t)) = 0. \quad (5)$$

つまり, 式 (2) は式 (3) のようなリアプノフ関数をもっている. しかし [3] によると, $S(v) = \log v$ としたとき, 式 (2) がリアプノフ関数をもつかはわかっていない.

5. リアプノフ関数をもつ偏微分方程式系

式 (2) で, $S(v) = \log v$ ではリアプノフ関数は見つかっていないので, リアプノフ関数を先に与えて, どのような偏微分方程式が得られるかを考える. そこで, 質量保存則と $S(v) = \log v$ に対応する $\mathcal{F}$ を先に考えることで, どのような方程式が得られるかを考察する.

定理 3. 次の微分方程式系

$$\begin{cases} u_t + \nabla \cdot (-u\nabla(\log u - \chi \log v)) = 0 & \text{in} \quad \Omega \times (0,T), \\ \tau v_t = \dfrac{u}{v} + \Delta v - v & \text{in} \quad \Omega \times (0,T), \\ \vec{h}(u,v) \cdot \nu = 0, \dfrac{\partial v}{\partial \nu} = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega \times (0,T) \end{cases} \quad (6)$$

の解 u, v に対して $\mathcal{F}$ を,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(u,v) = &\int_\Omega (u(\log u - 1) - \chi u \log v) dx \\ &+ \frac{\chi}{2}\int_\Omega (|\nabla v|^2 + v^2) dx \end{aligned} \quad (7)$$

と定めると,

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\mathcal{F}(u(t), v(t)) + \mathcal{D}(u(t), v(t)) = 0, \\ &\vec{h}(u,v) = -\nabla(\log u - \chi \log v), \\ &\mathcal{D}(u(t), v(t)) = \int_\Omega u|\vec{h}(u,v)|^2 dx + \chi\int_\Omega \tau v_t^2 dx \geq 0 \end{aligned} \quad (8)$$

が成り立つ. すなわち, $\mathcal{F}$ は式 (6) のリアプノフ関数である.

定理 3 は, $\mathcal{F}$ と質量保存則を考えたとき, 式 (6) の方程式を考えれば, $\mathcal{F}$ がリアプノフ関数となることを主張している.

6. 定理 3 の証明

$\vec{h}(u,v)$ を未知ベクトル値関数として,

$$u_t + \nabla \cdot (u\vec{h}(u,v)) = 0 \quad (9)$$

を考える. $\vec{h}(u,v)$ をどのようにとれば, $\mathcal{F}$ がリアプノフ関数となるかを考える. $\mathcal{F}(u,v)$ を t で微分すると,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{F}(u,v) = &\int_\Omega u_t(\log u - 1) + u_t - \chi u_t \log v - \chi u \frac{v_t}{v} dx \\ &+ \chi \int_\Omega \nabla v_t \cdot \nabla v + v v_t dx. \end{aligned}$$

式 (9) より,

$$\begin{aligned} &\int_\Omega u_t(\log u - 1) + u_t - \chi u_t \log v dx \\ &= -\int_\Omega \nabla \cdot (u\vec{h}(u,v))(\log u - \chi \log v) dx. \end{aligned}$$

境界条件と部分積分により,

$$\begin{aligned} &-\int_\Omega \nabla \cdot (u\vec{h}(u,v))(\log u - \chi \log v) dx \\ &= \int_\Omega \nabla(\log u - \chi \log v) \cdot (u\vec{h}(u,v)) dx, \end{aligned}$$

$$\chi \int_\Omega \nabla v_t \cdot \nabla v dx = -\chi \int_\Omega v_t \Delta v dx.$$

よって, $\tau v_t = \frac{u}{v} + \Delta v - v, \vec{h}(u,v) = -\nabla(\log u - \chi \log v)$ とすると,

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}(u,v) = -\int_\Omega u|\vec{h}(u,v)|^2 dx - \chi \int_\Omega \tau v_t^2 dx.$$

よって, $\mathcal{D}(u,v) = \int_\Omega u|\vec{h}(u,v)|^2 dx + \chi \int_\Omega \tau v_t^2 dx$ とすると式 (8) が成り立ち, $\mathcal{D}(u,v) \geq 0$ がわかる.

7. 参考文献

[1] Keller, E. F., Segel, L. A., Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability. J. Theoret. Biol. 26(1970), 399–415.

[2] Horstmann, D. Do some chemotaxis-growth models possess Lyapunov functionals? Appl. Math. Lett. 53(2016), 107–111.

[3] 仙葉 隆, 対数関数を知覚関数に持つ走化性方程式系の解の挙動について, 2024 年度日本数学会年会総合講演 · 企画特別講演アブストラクト, 53–63, 2024.