P-6

二階偏微分方程式の粘性解の比較原理

The comparison principle for viscosity solutions of second-order partial differrential equations

○池田信之 [1]
*Nobuyuki Ikeda 1

Abstract: We consider the uniqueness of viscosity solutions of second-order partial differential equations subjected to the Dirichlet boundary condition. For this purpose, we study the comparison principle in order to show the uniqueness of solutions. Assuming the structure condition, we prove the comparison principle for viscosity solutions of the second-order partial differential equations.

1. はじめに

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ は有界開集合、S^n を $n \times n$ 対称行列のなす集合とする.$\nu > 0$ は定数、$F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times S^n \to \mathbb{R}$ は連続であるとする。ここで $X, Y \in S^n$、任意の $\xi \in \mathbb{R}^n$ に対して $X \leq Y$ とは次が成り立つことである.

$$X \leq Y \iff \langle X\xi, \xi \rangle \leq \langle Y\xi, \xi \rangle.$$

定義 1 ([1, 定義 1.4])**.** F が楕円型であるとは任意の $x \in \Omega$, $r \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}^n$, $X, Y \in S^n$ に対して $X \leq Y$ ならば $F(x, r, p, X) \geq F(x, r, p, Y)$ が成り立つことである.

$u : \Omega \to \mathbb{R}$ が $x \in \Omega$ で一回または二回微分可能な時 $Du(x) = (u_{x_j}(x))_{j=1,\cdots n}$、$D^2u(x) = (u_{x_i x_j}(x))_{i,j=1,\cdots n}$ と表す. 本研究では、

$$\nu u(x) + F(x, u(x), Du(x), D^2u(x)) = 0 \qquad \text{in} \quad \Omega \quad (1)$$

のような二階偏微分方程式の Dirichlet 境界条件

$$u(x) = 0 \qquad \text{on} \quad \partial\Omega \quad (2)$$

下での粘性解の一意性について考える. 粘性解の一意性を示すためには、のちに述べる粘性解に対する比較原理を示せばよい. 本講演は [2] による二階偏微分方程式の粘性解に対する比較原理についての総合報告である.

2. 粘性解

定義 2 ([1, 定義 2.1])**.** 任意の $\phi \in C^2(\Omega)$ に対して $u - \phi$ が $x \in \Omega$ で最大値 (最小値) をとるならば

$$F(x, u(x), D\phi(x), D^2\phi(x)) \leq 0 (\geq 0)$$

が成り立つとき $u : \Omega \to \mathbb{R}$ を (1) の粘性劣解 (優解) であるという.

定義 3 ([1, 定義 2.3])**.** $u : \Omega \to \mathbb{R}$ が (1) の粘性劣解かつ粘性優解であるとき u を (1) の粘性解であるという.

3. 二階偏微分方程式の粘性解の比較原理

二階偏微分方程式の比較原理を考えることで Dirichlet 境界条件下での二階偏微分方程式の粘性解の一意性を示すことができる. 二階偏微分方程式の比較原理を証明するために構造条件と呼ばれる仮定を与える.

定義 4 ([2, (3.21)])**.** F が構造条件を満たすとは以下を満たす $[0, \infty)$ 上連続で $\omega(0) = 0$ を満たす非負値関数 $\omega_F : [0, \infty) \to [0, \infty)$ が存在することである: $X, Y \in S^n, \mu > 1$ が

$$-3\mu \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \leqq \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} \leqq 3\mu \begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix}$$

を満たすならば

$$F(y, \mu(x-y), Y) - F(x, \mu(x-y), X) \leqq \omega_F(|x-y|(1 + \mu|x-y|))$$

が成り立つ.

構造条件を満たすとき F が楕円型であることが [3] の Remark3.4 で証明されている. ここで

$$USC(\overline{\Omega}) := \{u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R} \mid \overline{\Omega}\text{上上半連続}\}$$

$$LSC(\overline{\Omega}) := \{u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R} \mid \overline{\Omega}\text{上下半連続}\}$$

とする.

定理 5 ([2, Theorem3.7])**.** $\nu > 0$ は正定数とする.F は構造条件を満たすと仮定する.$u \in USC(\overline{\Omega})$ が (1) の粘性劣解、$v \in LSC(\overline{\Omega})$ が (1) の粘性優解とする. $\partial\Omega$ 上 $u \leq v$ ならば $\overline{\Omega}$ 上 $u \leq v$ が成り立つ.

定理 5 を比較原理という. この比較原理を証明することで二階偏微分方程式の粘性解の解の一意性を示すことができる.

命題 6. Dirichlet 境界条件下 (2) を満たす u, v が (1) の粘性解ならば $\overline{\Omega}$ 上 $u = v$ が成り立つ.

1: 日大理工・院 (前)・数学

Proof. $\partial\Omega$ 上 $u = v = 0$ より $\partial\Omega$ 上 $u \leq v$, $\quad v \leq u$ である. u が粘性劣解、v が粘性優解、$\partial\Omega$ 上 $u \leq v$ なので比較原理より $\overline{\Omega}$ 上 $u \leq v$ が成り立つ.

また、u が粘性優解、v が粘性劣解、$\partial\Omega$ 上 $v \leq u$ なので比較原理より $\overline{\Omega}$ 上 $v \leq u$ が成り立つ.

したがって $\overline{\Omega}$ 上 $u = v$ が成り立つ. □

4. 定理 4 の証明

定理 4 を背理法で示す. $\max(u - v) =: \theta > 0$ と仮定する. $\varepsilon > 0$ に対して

$$\phi_\varepsilon(x, y) := u(x) - v(y) - \frac{|x - y|^2}{2\varepsilon}$$

とおく. $(u_\varepsilon, y_\varepsilon) \in \overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$ で ϕ_ε が最大値となるとすると

$$\phi_\varepsilon(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \geq \max_{x,y\in\overline{\Omega}} \phi_\varepsilon(x, x) = \max_{x,y\in\overline{\Omega}} (u(x) - v(x)) = \theta.$$

Bolzano-Weierstrass の定理より

$$\varepsilon_k \to 0, (x_{\varepsilon_k}, y_{\varepsilon_k}) \to (\hat{x}, \hat{y})(k \to \infty)$$

を満たす $\hat{x}, \hat{y} \in \overline{\Omega}, \varepsilon_k > 0$ が存在する. $\phi_\varepsilon(x_{\varepsilon_k}, y_{\varepsilon_k}) \geq \theta$ より

$$\frac{|x_{\varepsilon_k} - y_{\varepsilon_k}|^2}{2\varepsilon_k} \leq \max_{\overline{\Omega}} u - \min_{\overline{\Omega}} v$$

だから $|x_{\varepsilon_k} - y_{\varepsilon_k}| \leq 2\varepsilon_k(\max_{\overline{\Omega}} u - \min_{\overline{\Omega}} v) \to 0(k \to \infty)$.

よって $\hat{x} = \hat{y}$ となるので $(x_{\varepsilon_k}, y_{\varepsilon_k}) \to (\hat{x}, \hat{y})(k \to \infty)$ となる.

次に

$$0 \leq \frac{|x_{\varepsilon_k} - y_{\varepsilon_k}|^2}{2\varepsilon_k} = u(x_{\varepsilon_k}) - v(y_{\varepsilon_k}) - \theta$$

より上極限をとれば $u - v(\hat{x}) = \theta$。$\partial\Omega$ 上 $u \leq v$ より $\hat{x} \in \Omega$ となる. 議論を進めるにあたり、次の石井の補題を用いる.

補題 7 ([2, Lemma3.6])**.** $u, \omega \in USC(\overline{\Omega}), \phi \in C^2(\overline{\Omega} \times \Omega)$ に対し $(\hat{x}, \hat{y}) \in (\Omega \times \Omega)$ は次を満たすとする.

$$\max_{x,y\in\overline{\Omega}} (u(x) - v(y) - \phi(x, y)) = u(\hat{x}) - v(\hat{y}) - \phi(\hat{x}, \hat{y}).$$

このとき、任意の $\mu > 1$ に対して次を満たす $X, Y \in S^n$ が存在する.

$$(D_x\phi(\hat{x}, \hat{y}), X) \in \overline{J}^{2,+}_{\overline{\Omega}} u(\hat{x}), (D_x\phi(\hat{x}, \hat{y}), Y) \in \overline{J}^{2,+}_{\overline{\Omega}} \omega(\hat{y}),$$

$$-(\mu + ||A||) \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} \leq A + \frac{1}{\mu} A^2$$

ただし $A = D^2\phi(\hat{x}, \hat{y}) \in S^n$,

$\overline{J}^{2,\pm}_K u(x)$

$$:= \left\{ \begin{array}{c|r} (p, X) \in & \exists x_k \in K, \exists(p_k, X_k) \in J^{2,+}_k u(x_k) s.t. \\ \mathbb{R}^n \times S^n & (x_k, U(x_k), p_k, X_k) \to (x, u(x), p, X) \\ & (k \to \infty) \end{array} \right\},$$

$$J^{2,+}_K u(x) := \left\{ \begin{array}{c|r} (p, X) \in & u(y) \leq u(x) + \langle p, y - x\rangle \\ \mathbb{R}^n \times S^n & +\frac{1}{2}\langle X(y - x), y - x\rangle \\ & +o(|y - x|^2)(y \in K \to x) \end{array} \right\},$$

$$J^{2,-}_K u(x) := \left\{ \begin{array}{c|r} (p, X) \in & u(y) \geq u(x) + \langle p, y - x\rangle \\ \mathbb{R}^n \times S^n & +\frac{1}{2}\langle X(y - x), y - x\rangle \\ & +o(|y - x|^2)(y \in K \to x) \end{array} \right\}.$$

これより $\omega := -v, \mu := \frac{1}{\varepsilon_k}, \phi(x, y) = \frac{|x-y|^2}{2\varepsilon_k}$ とすると

$$(\frac{x_\varepsilon - y_\varepsilon}{\varepsilon}, X) \in \overline{J}^{2,+} u(x_{\varepsilon_k}), (\frac{x_\varepsilon - y_\varepsilon}{\varepsilon}, -Y) \in \overline{J}^{2,-} v(y_{\varepsilon_k}),$$

$$-3\mu \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y \end{pmatrix} \leq 3\mu \begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix}$$

を満たす $X, -Y \in S^n$ が存在する.

ここで u が粘性劣解 (優解) であることと $x \in \Omega$ と $(p, X) \in \overline{J}^{2,+} u(x)(resp., \overline{J}^{2,-} u(x))$ に対して $F(x, u(x), p, X) \leq 0(resp., \geq 0)$ が成り立つことが同値なので

$$\nu u(x_{\varepsilon_k}) + F(x_{\varepsilon_k}, \frac{x_{\varepsilon_k} - y_{\varepsilon_k}}{\varepsilon_k}, X) \leq 0,$$

$$0 \leq \nu v(y_{\varepsilon_k}) + F(y_{\varepsilon_k}, \frac{x_{\varepsilon_k} - y_{\varepsilon_k}}{\varepsilon_k}, -Y).$$

よって構造条件より

$$\begin{aligned} \nu(u(x_{\varepsilon_k}) - v(y_{\varepsilon_k})) &\leq F(y_{\varepsilon_k}, \frac{x_{\varepsilon_k} - y_{\varepsilon_k}}{\varepsilon_k}, -Y) \\ &\quad - F(x_{\varepsilon_k}, \frac{x_{\varepsilon_k} - y_{\varepsilon_k}}{\varepsilon_k}, X) \\ &\leq \omega_F(|x_{\varepsilon_k} - y_{\varepsilon_k}|(1 + \mu|x_{\varepsilon_k} - y_{\varepsilon_k}|). \end{aligned}$$

ここで $k \to \infty$ とすると $\nu\theta \leq 0$ となるが、仮定 $\nu > 0$ より $\theta \leq 0$ となり矛盾する.

5. 参考文献

[1] 小池茂昭. 粘性解–比較原理を中心に–, 共立出版 ,2016

[2] Shigeaki Koike. A beginner's guide to the theory of viscosity solutions, MSJ Memoirs, **13**, 2014.

[3] Crandall, Michael G., Ishii, Hitoshi and Lions, Pierre-Louis. User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations, Bull. Amer. Math. Soc, **27**(1992),1–67.