P-7

Fourier 変換を用いた波動方程式の解の公式の導出

Derivation of solution formula for weve equations using the Fourier transform

○望月翔斗 [1]
*Shoto Mochizuki[1]

Abstract: In this article we first define the Fourier transform and give some basic properties of the Fourier transform. Then we give the formula for the solution of the wave equation in general dimensions using the Fourier transform. Moreover we give the formula for the solution of the wave equation in three dimensions without using the Fourier transform.

1. 定義と命題

本講演では d 次元波動方程式の Cauchy 問題

$$\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,,\ u(x,0) = f(x)\,,\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) \qquad (1)$$

の解の公式を Fourier 変換を伴った形で導出を行う．そのためにいくつかの定義と命題を与える．

Laplace 作用素を

$$\triangle = \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$$

と定義し，与えられた非負整数の組 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_d)$ に対し，単項式 x^α，微分作用素 $(\partial/\partial x)^\alpha$ をそれぞれ

$$x^\alpha = \prod_{k=1}^{d} x_k^{\alpha_k} \quad , \quad \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha = \prod_{k=1}^{d} \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)^{\alpha_k}$$

と定義する．以降，非負整数の組 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_d)$ のことを多重指数と呼ぶ．また，$\mathbb{R}^d$ における回転を線形変換 $\mathbf{R} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ で，任意の $x, y \in \mathbb{R}^d$ に対し，

$$\mathbf{R}(x) \cdot \mathbf{R}(y) = x \cdot y$$

が成立することと定義する．この条件は任意の $x \in \mathbb{R}^d$ に対し，$|\mathbf{R}(x)| = |x|$ が成立すること，あるいは ${}^t\mathbf{R} = \mathbf{R}^{-1}$ が成立することと同値である．次に，Schwartz 空間 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ を $\mathbb{R}^d$ 上の C^∞ 級関数で，任意の多重指数 α, β に対し，

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left| x^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\beta f(x) \right| < \infty$$

を満たすものの全体と定義する．さらに，$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ の Fourier 変換を $\xi \in \mathbb{R}^d$ として

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i x\cdot\xi} dx$$

と定義する．

命題 1. $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ とする．このとき次が成立する．

(i) 任意の多重指数 α に対し

$$(2\pi i \xi)^\alpha \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha f(x) e^{-2\pi i x\cdot\xi} dx$$

(ii) 任意の多重指数 α に対し

$$\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^\alpha \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} (-2\pi i x)^\alpha f(x) e^{-2\pi i x\cdot\xi} dx$$

(iii) 任意の回転 $\mathbf{R}$ に対し

$$\widehat{f}(\mathbf{R}(x)) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{R}(x)) e^{-2\pi i x\cdot\xi} dx$$

命題 2. $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ とする．このとき次が成立する．

(i) $$\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$$

(ii) $$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| dx < \infty$$

命題 3. $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ とする．このとき次が成立する．

(i) Fourier の反転公式

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x\cdot\xi} d\xi$$

(ii) Plancherel の定理

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx$$

2. 主定理：d 次元波動方程式の解の公式

d 次元波動方程式の解の公式を導出することから始める．$f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$，$u$ を波動方程式の Cauchy 問題の解とする．波動方程式

$$\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

に対し，x について Fourier 変換を形式的に適用すると

$$-4\pi^2 |\xi|^2 \widehat{u} = \frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial t^2}$$

1: 日大理工・院 (前)・数学

が得られる．各 $\xi \in \mathbb{R}^d$ を固定すると上式は t についての常微分方程式であり，解は未知関数 $A(\xi), B(\xi)$ を用いて

$$\widehat{u}(\xi,t) = A(\xi)\cos(2\pi|\xi|t) + B(\xi)\sin(2\pi|\xi|t)$$

で与えられる．初期値に対し，x について Fourier 変換を適用することで

$$\widehat{u}(\xi,t) = \widehat{f}(\xi)\cos(2\pi|\xi|t) + \widehat{g}(\xi)\frac{\sin(2\pi|\xi|t)}{2\pi|\xi|}$$

が得られる．$\widehat{u}$ に対し，ξ について Fourier の反転公式を適用すると

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^d}\left(\widehat{f}(\xi)\cos(2\pi|\xi|t) + \widehat{g}(\xi)\frac{\sin(2\pi|\xi|t)}{2\pi|\xi|}\right)e^{2\pi i x\cdot\xi}d\xi$$

が得られる．

定理 4. $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ とする．このとき，d 次元波動方程式の Cauchy 問題 (1) の解は次のように表現できる．

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^d}\left(\widehat{f}(\xi)\cos(2\pi|\xi|t) + \widehat{g}(\xi)\frac{\sin(2\pi|\xi|t)}{2\pi|\xi|}\right)e^{2\pi i x\cdot\xi}d\xi \quad (2)$$

3. 主定理の証明の概略

(2) の u が波動方程式の解であること，初期条件を満たしていることを確かめる．$f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $k \in \mathbb{N}\,(1 \le k \le d)$ とする．また，(2) の右辺の被積分関数を $F(x,\xi)$ とおく．このとき，$F(x,\xi)$ は各 $x \in \mathbb{R}^d$ を固定するごとに可積分で，各 $\xi \in \mathbb{R}^d$ を固定するごとに $x_k \in \mathbb{R}$ について C^2 級である．さらに，$\xi \in \mathbb{R}^d$ にのみ依存する可積分関数 $G(\xi)$ が存在して，

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_k}F(x,\xi)\right| \le |G(\xi)|$$

が成立する．これらのことから，x_k についての微分と ξ についての積分の順序交換が可能であることに注意すると

$$\triangle u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^d}\left(\widehat{f}(\xi)\cos(2\pi|\xi|t) + \widehat{g}(\xi)\frac{\sin(2\pi|\xi|t)}{2\pi|\xi|}\right)(-4\pi^2|\xi|^2)e^{2\pi i x\cdot\xi}d\xi$$

が得られる．同様に，t についての微分と ξ についての積分の順序交換が可能であることに注意すると

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = \int_{\mathbb{R}^d}\left(-\widehat{f}(\xi)\cos(2\pi|\xi|t) - \widehat{g}(\xi)\frac{\sin(2\pi|\xi|t)}{2\pi|\xi|}\right)4\pi^2|\xi|^2 e^{2\pi i x\cdot\xi}d\xi$$

が得られる．したがって，u は波動方程式の解である．

また (2) の u に対し，$t = 0$ とおくと $u(x,0) = f(x)$ が得られ，t について微分してから $t = 0$ とおくと $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$ が得られる．したがって，u は初期条件を満たしていることがわかる．

ここで得られた解の公式は，与えられた関数に対し Fourier 変換の計算が必要があり，直接的に解を求めることができない．そこで，主定理の応用として 3 次元において，Fourier 変換を伴わない形に改めることにする．

4. 3 次元波動方程式の解の公式

定理 5. $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ とする．このとき，3 次元波動方程式の Cauchy 問題の解は次のように表現できる．

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\big(tM_t(f)(x)\big) + tM_t(g)(x)$$

ここで，$M_t(f)(x)$ とは，中心 x，半径 t の球面上における関数 f の球面平均のことで

$$M_t(f)(x) = \frac{1}{4\pi}\int_{S^2} f(x-\gamma t)d\sigma(\gamma)$$

と定義される．また，S^2 は $\mathbb{R}^3$ 上の単位球面，$d\sigma(\gamma)$ は S^2 上の面積要素を意味する．

定理 5 を証明するために，次の 3 つの補題を与える．

補題 6. $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ ならば $t \in \mathbb{R}$ を固定するごとに $M_t(f) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ である．さらに，$M_t(f)$ は t に関して C^∞ 級で t に関する各導関数も $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ に属す．

補題 7. 次の等式が成立する．

$$\frac{1}{4\pi}\int_{S^2} e^{-2\pi i\xi\cdot\gamma}d\sigma(\gamma) = \frac{\sin(2\pi|\xi|)}{2\pi|\xi|}$$

補題 8. $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ とする．このとき次が成立する．

$$\widehat{M_t(f)}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\frac{\sin(2\pi|\xi|t)}{2\pi|\xi|t}$$

5. 定理 5 の証明の概略

主定理の証明と同様に，t についての微分と ξ についての積分の順序交換が可能であることに注意すると，

$$\begin{aligned}
u(x,t)
&= \int_{\mathbb{R}^3}\left(\widehat{f}(\xi)\cos(2\pi|\xi|t) + \widehat{g}(\xi)\frac{\sin(2\pi|\xi|t)}{2\pi|\xi|}\right)e^{2\pi i x\cdot\xi}d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^3}\left(\widehat{f}(\xi)\frac{\partial}{\partial t}\frac{\sin(2\pi|\xi|t)}{2\pi|\xi|} + \widehat{g}(\xi)\frac{\sin(2\pi|\xi|t)}{2\pi|\xi|}\right)e^{2\pi i x\cdot\xi}d\xi \\
&= \frac{\partial}{\partial t}t\int_{\mathbb{R}^3}\widehat{M_t(f)}(\xi)e^{2\pi i x\cdot\xi}d\xi + t\int_{\mathbb{R}^3}\widehat{M_t(g)}(\xi)e^{2\pi i x\cdot\xi}d\xi \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\big(tM_t(f)(x)\big) + tM_t(g)(x)
\end{aligned}$$

が得られる．

6. 参考文献

[1] エリアス・M・スタイン　ラミ・シャカルチ　著　フーリエ解析入門　日本評論社　(2007)