P-9

代数的トーラスにおける消去問題とレトラクト問題

Cancellation problems on an algebraic torus

○長峰 孝典 [1]
*Takanori Nagamine[1]

Abstract: アフィン空間におけるザリスキの消去問題 (問題 2) およびレトラクト問題 (問題 3) について概説する. さらに, それらの代数的トーラス類似を考え, 得られた研究成果 (定理 4) を報告する. なお本講演は [6] に基づく.

1. はじめに

k を体 ($\mathbb{R}, \mathbb{C}$ など), $k^* := k \setminus \{0\}$ とする. $n \in \mathbb{N}$ に対して, $k^n := \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_i \in k\}$ を n 次元**アフィン空間**, $(k^*)^n$ を n 次元**代数的トーラス**という. アフィン代数幾何学の目標の一つは, 与えられた代数多様体 (多項式の連立方程式の解空間として定まる図形) がどのようなときにアフィン空間 k^n と同型となるかを明らかにすることである.

定義 1. X, Y を代数多様体とする. X が Y の**レトラクト**であるとは, $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_X$ をみたす射 $\varphi : Y \to X$ および $\psi : X \to Y$ が存在するときをいう. 特に $X \subset Y$ である.

ここで, 代数多様体 X に対して以下の条件を考える.

(a) $X \cong k^d$ ($\cong$ は代数多様体としての同型を意味する),

(b) $X \times k^m \cong k^{d+m}$ となる $m \geq 1$ が存在する,

(c) X が k^{d+m} のレトラクトとなる $m \geq 1$ が存在する.

すぐにわかるように, (a)⇒(b)⇒(c) が成り立つ.

問題 2. (ザリスキの消去問題) $m = 1$ に対して (b)⇒(a) が成り立つか? すなわち, $X \times k^1 \cong k^{d+1}$ のとき $X \cong k^d$ となるか (両辺から k を消去できるか)?

$\dim X = 1$ の場合, Abhyankar, Heinzer, Eakin [1] により肯定的に解決された. $\dim X = 2$ の場合も肯定的に解決しており, 藤田 [4], 宮西・杉江 [7] など日本人数学者の貢献が大きい. しかしながら $\dim X \geq 3$ で標数 (1 を足して 0 になる最小の数) が正の場合, Gupta が反例を与えた ([5]). $\dim X \geq 3$ で標数 0 の場合は未解決である.

次の問題は, 1977 年に Costa [3] により提唱された.

問題 3. 任意の $m \geq 1$ に対して (c)⇒(a) が成り立つか?

問題 3 が肯定的のとき, 条件 (a), (b), (c) はすべて同値となるため問題 2 も肯定的となる. したがって, この問題は問題 2を含む. Costa は同じ論文 ([3]) で, $\dim X = 1$ の場合に肯定的であることを示した. 筆者は $\dim X = 2$ で k の標数が 0 の場合にも肯定的となることを示した ([8]). また, 前述の Gupta の反例は, 問題 3の反例にもなっているため, $\dim X \geq 3$ で標数が正の場合は否定的である. しかしながら, $\dim X = 2$ で標数が正の場合および $\dim X \geq 3$ で標数が 0 の場合は未解決である.

2. 主結果

本講演では, これらの問題の代数的トーラス類似を考える. 同様に, X に対して以下の 3 つの条件を考える.

(a*) $X \cong (k^*)^d$,

(b*) $X \times (k^*)^m \cong (k^*)^{d+m}$ となる $m \geq 1$ が存在する,

(c*) X が $(k^*)^{d+m}$ のレトラクトとなる $m \geq 1$ が存在する.

同様に, (a*)⇒(b*)⇒(c*) が成り立つ. Bhatwadekar と Gupta [2] は (b*)⇒(a*) 成り立つことを示した. よって, 問題 2の代数的トーラス類似は肯定的である. 本講演の主結果は, 以下の通りである.

定理 4. (cf. [6]) 任意の $m \geq 1$ に対して (c*)⇒(a*) が成り立つ. すなわち (a*), (b*), (c*) はすべて同値である.

したがって定理 4は, [2] の結果の一般化を与える.

3. 参考文献

[1] S. Abhyankar, W. Heinzer and P. Eakin, On the uniqueness of the ring of coefficients in a polynomial ring, J. Algebra **23** (1972), 310–342.

[2] S.M. Bhatwadekar and N. Gupta, The structure of a Laurent polynomial fibration in n variables, J. Algebra **353** (2012), 142–157.

[3] D. Costa, Retracts of polynomial rings, J. Algebra **44**, (1977), 492–502.

[4] T. Fujita, On Zariski problem, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci., **55** (1979), 106–110.

[5] N. Gupta, On the cancellation problem for the affine space $\mathbb{A}^3$ in characteristic p, Invent. Math., **195** (2014), 279–288.

[6] N. Gupta and T. Nagamine, Retracts of Laurent polynomial rings, preprint, arXiv:2301.12681.

[7] M. Miyanishi and T. Sugie, Affine surfaces containing cylinderlike open sets, J. Math. Kyoto Univ., **20** (1980), 11–42.

[8] T. Nagamine, A note on retracts of polynomial rings in three variables, J.Algebra **534** (2019), 339–343.

1: 日大理工・教員・数学