

## 収縮率の微分項および端部補正係数を考慮するゴム空気圧アクチュエータのモデリング Modeling of a Rubber Pneumatic Actuator with Contraction Ratio Derivative and End-Correction Coefficient

大寄亮<sup>1</sup>, 金安亮太<sup>1</sup>, 〇田村直斗<sup>2</sup>, 金城拓磨<sup>2</sup>, 井上健<sup>3</sup>  
Ryo Oyori<sup>1</sup>, Ryota Kaneyasu<sup>1</sup>, \*Naoto Tamura<sup>2</sup>, Takuma Kinjo<sup>2</sup>, Tsuyoshi Inoue<sup>3</sup>

Abstract: In this paper, we propose a refined nonlinear mathematical model for McKibben-type Pneumatic Actuators (MTPAs). Our model accurately reflects physical dynamics by incorporating both the time derivative of the contraction ratio and a correction factor at the actuator's ends. We linearize this nonlinear state equation around an equilibrium point to derive a useful linear state equation and transfer function.

### 1. はじめに

McKibben 型空気圧アクチュエータ (MTPA) は、非伸縮性のメッシュで覆われたゴムチューブ内部に空気を注入することで、縦方向での膨張、横方向での収縮により収縮力を発生するアクチュエータである<sup>[1-3]</sup>。従来研究<sup>[1,2]</sup>の数理モデルは摩擦によるヒステリシスや構造非線形性を考慮できる一方、端部変形や平衡点近傍で線形化した MTPA の状態方程式および伝達関数などの簡便で使いやすい数理モデルを導出することに課題がある。

これまでに、MTPA の収縮率の微分項を含む体積の動特性モデルを提案し、これを用いて非線形状態方程式を導出し、平衡点近傍での線形化した状態方程式および伝達関数を導出した<sup>[1,2]</sup>。しかしながら、端部構造の影響を反映する数理モデルにはなっていない問題点を有している。そこで、本稿では文献<sup>[1,2]</sup>に基づき収縮率の微分項を含む体積の動特性モデルおよび、端部構造の影響を反映する非線形状態方程式を導出し、平衡点近傍での線形化した状態方程式および伝達関数を導出する。本稿で用いる数理モデルの量記号を Table 1 に示す<sup>[1,2]</sup>。

### 2. MTPA の特性

本節では、文献<sup>[1,2]</sup> および Figure 2 の MTPA システムの数理モデルを紹介する。

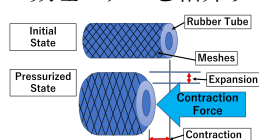


Figure 1. MTPA

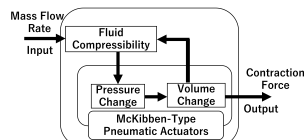


Figure 2. MTPA System

#### 2.1. MTPA の微分方程式および収縮率

MTPA 内部の圧力変化  $dP(t)/dt$  は、人工筋肉内部の理想気体の熱エネルギー保存則より次のように導出できる。

$$\frac{dP(t)}{dt} = \kappa \frac{RT}{V(t)} Q_m(t) - \kappa \frac{dV(t)}{dt} \frac{P(t)}{V(t)}. \quad (1)$$

#### 2.2. MTPA の収縮率

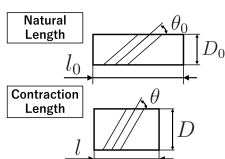


Figure 3. Shape of MTPA Before and After Contraction

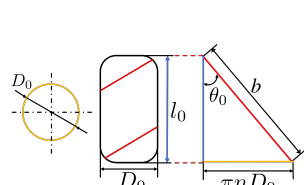


Figure 4. MTPA Geometric Model

Table 1. List of Quantity Symbols

Symbol	Meaning	Unit
$P(t)$	Absolute Internal Gas Pressure	[Pa]
$V(t)$	Volume of MTPA	[m <sup>3</sup> ]
$m$	Mass of Air	[kg]
$T$	Absolute Temperature	[K]
$Q_m(t)$	Mass Flow Rate	[kg/s]
$\kappa$	Specific Heat Ratio for Air	[-]
$R$	Ideal Gas Constant	[J/(kg K)]
$\epsilon(t)$	Contraction Ratio	[-]
$F(t)$	Contraction Force	[N]
$b$	Length of Mesh	[m]
$l_0$	Natural Length of MTPA	[m]
$l(t)$	Length of MTPA at Contraction	[m]
$D$	Diameter of MTPA at Contraction	[m]
$D_0$	Natural Diameter of MTPA	[m]
$\theta(t)$	Angle of Mesh at Contraction	[rad]
$\theta_0$	Angle of Mesh at Natural Length	[rad]

文献<sup>[1,2]</sup>, Figure 3, Figure 4 に基づき、MTPA の自然長時のメッシュの長さ、円周および、全長を用いて MTPA の収縮前後の長さの比率  $\epsilon(t)$  を求めている。すなわち、 $\epsilon(t)$  は  $b, l_0, l(t), \theta_0$  および、 $\theta(t)$  を用いて次式になる。

$$\epsilon(t) = \frac{l_0 - l(t)}{l_0} = \frac{b \cos \theta_0 - b \cos \theta(t)}{b \cos \theta_0} = \frac{\cos \theta_0 - \cos \theta(t)}{\cos \theta_0}. \quad (2)$$

#### 2.3. MTPA の収縮力

文献<sup>[1,2]</sup> より、人工筋肉の端部による補正を考慮する係数  $C_{q1}, C_{q2}$  と大気圧  $P_o$  を含んだ収縮力の式を示す。

$$F_2(P, \epsilon, t) = \frac{\pi D_0^2}{4} \left( \frac{mRT}{V(t)} - P_o \right) \times \left[ \left\{ 1 - C_{q1} \left( 1 + e^{C_{q2} \left( \frac{mRT}{V(t)} - P_o \right)} \right) \epsilon(t) \right\}^2 \times \frac{3}{\tan^2 \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \right]. \quad (3)$$

### 3. 数理モデル

#### 3.1. 流体の圧縮性

(1) 式より流体の圧縮性を

$$\frac{dP(t)}{dt} = RT \left( \frac{\kappa}{V(t)} \right) Q_m(t) - P(t) \left( \frac{\kappa}{V(t)} \right) \frac{dV(t)}{dt} \quad (4)$$

とする。ここで、 $dP(t)/dt$  は、MTPA 内の圧力変化を表す。また、(4) 式の両辺に  $V^2/m$  を乗じて  $P(t) =$

$mRT/V(t)$  を代入すると以下を得る.

$$\frac{d}{dt}V(t) = \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{V(t)}{m} Q_m(t). \quad (5)$$

### 3.2. 体積 $V(t)$ の動特性モデル

MTPA 内の体積の数理モデルを

$$V_1(t) = D_2\epsilon(t) + D_3 + D_4v(t) + D_5 \frac{d\epsilon(t)}{dt}, \quad (6)$$

$$v(t) := e^{\mu t}v(0) + \int_0^t e^{\mu(t-\tau)}\epsilon(\tau)d\tau \quad (7)$$

のように提案する. ここで,  $D_2, D_3, D_4, D_5$  は収縮率による変数の係数,  $\mu$  は任意の負の整数である.

### 3.3. 主結果

#### 3.3.1. MTPA の非線形状態方程式

(6) 式に基づき MTPA の非線形状態方程式を導出する.

まず, (4), (5) 式に (6) 式を代入すると

$$\begin{bmatrix} \dot{\epsilon}(t) \\ \dot{v}(t) \\ \dot{\lambda}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & \mu & 0 \\ -\frac{D_3}{D_4} & 0 & -\frac{D_1}{D_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon(t) \\ v(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\kappa V_1(t)}{(\kappa-1)D_4 m} \end{bmatrix}' Q_m(t), \quad (8)$$

$$\begin{aligned} F_2(P, \epsilon, t) &= \frac{\pi D_0^2}{4} \left( \frac{mRT}{V_1(t)} - P_0 \right) \\ &\times \left[ \left\{ 1 - C_{q1} \left( 1 + e^{C_{q2} \left( \frac{mRT}{V_1(t)} - P_0 \right)} \right) \epsilon(t) \right\}^2 \right. \\ &\times \left. \frac{3}{\tan^2 \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \right] \end{aligned} \quad (9)$$

を得る. つぎに, (6) 式の平衡点は

$$\begin{bmatrix} \epsilon(t_e) & v(t_e) & \lambda(t_e) \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} \frac{\mu\alpha}{\beta} & -\frac{\alpha}{\beta} & 0 \end{bmatrix}', \quad (10)$$

$$\begin{cases} \alpha := \kappa D_3 \eta \\ \beta := (\kappa-1)m\mu D_4 + \kappa(D_4 - \mu D_2)\eta \end{cases}$$

のように導出できる. ここで,  $t_e$  は  $\dot{\epsilon}(t)$  および  $\dot{v}(t)$  の平衡点における時間,  $\eta$  は任意の定数である.

#### 3.3.2. MTPA の線形近似モデル

つぎの状態  $[x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t)]'$  および入力  $u(t)$  を定義する.

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \epsilon(t) \\ v(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \epsilon(t_e) \\ v(t_e) \\ \lambda(t_e) \end{bmatrix}, \quad u(t) := Q_m(t) - Q_m(t_e).$$

このとき, 平衡点 (10) 式近傍で線形近似を行うと, (8) 式および (9) 式は

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{C_1}{D_5(\kappa-1)m} \\ 0 & \mu & \frac{D_4\kappa Q_m(t_e)}{D_5(\kappa-1)m} \\ 1 & 0 & \frac{C_2}{D_5(\kappa-1)m} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\kappa V_1(t_e)}{(\kappa-1)D_5 m} \end{bmatrix}' u(t) \\ &=: \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & \mu & 0 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_3 \end{bmatrix} u(t), \quad (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \begin{bmatrix} \frac{dF_2}{d\epsilon} & \frac{dF_2}{dv} & \frac{dF_2}{d\lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \\ &=: \begin{bmatrix} X_1 + X_2 \\ X_3 + X_4 \\ X_5 + X_6 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (12)$$

となり, 線形状態方程式を得る. ここで, (11) 式で使われている各係数を以下とする.

$$\begin{cases} x_1 = mRT\pi D_0^2/4 \\ x_2 = 1/v(t)^2 \\ x_3 = 1/\tan^2 \theta \\ x_4 = V_1(t) - D_2\epsilon(t) \\ x_5 = e^{C_{q2}(mRT/V(t)-P_0)} \\ x_6 = -C_{q2}mRT D_2/V_1(t)^2\epsilon(t) \\ x_7 = V_1(t) - D_2\epsilon(t)^2 \\ x_8 = 1/\sin^2 \theta_0 \\ x_9 = \pi D_0^2 P_0/4 \\ x_{10} = -C_{q2}mRT D_6/V_1(t)^2 \\ x_{11} = e^{2C_{q2}(mRT/V_1(t)-P_0)} \\ x_{12} = -C_{q2}mRT D_7/V_1(t)^2 \\ C_1 = D_5 D_2 \kappa Q_m(t_e) - D_4(\kappa-1)m \\ C_2 = D_5 \kappa Q_m(t_e) - D_2(\kappa-1)m \\ Y_1 = x_1 x_2 x_3 \\ Y_2 = 6C_{q1} x_3 x_9 \\ Y_3 = 6C_{q1}\epsilon(t) x_3 x_9 x_{10} \\ Y_4 = 6C_{q1}\epsilon(t) x_3 x_9 x_{12} \\ X_1 = Y_1 \{-3D_2 - 6C_{q1} x_4 \{1 + x_5(1-x_6)\} \\ + 6C_{q1}^2 \epsilon(t) \{x_4 + x_5 x_7(3-2x_6)\}\} \\ X_2 = D_2 x_1 x_2 x_8 \\ + Y_2 \{1 + x_5(1-x_6) - C_{q1}\epsilon(t) \{1 + x_5(3-2x_6)\}\} \\ X_3 = Y_1 \{-3D_3 + 6C_{q1}\epsilon(t) (V_1(t)x_5 x_{10} - D_3) \\ - 3D_3 C_{q1}^2 \epsilon(t)^2 + 6C_{q1}^2 \epsilon(t)^2 (V_1(t)x_5 x_{10} - D_3) \\ + 3C_{q1}^2 \epsilon(t)^2 x_{11} (2V_1(t)x_{10} - D_3)\} \\ X_4 = D_3 x_1 x_2 x_8 + Y_3 \{x_5 - C_{q1}\epsilon(t) (x_5 + x_{11})\} \\ X_5 = Y_1 \{-3D_4 + 6C_{q1}\epsilon(t) (V_3(t)x_5 x_{12} - D_3) \\ - 3D_4 C_{q1}^2 \epsilon(t)^2 + 6C_{q1}^2 \epsilon(t)^2 (V_1(t)x_5 x_{12} - D_4) \\ + 3C_{q1}^2 \epsilon(t)^2 x_{11} (2V_1(t)x_{12} - D_4)\} \\ X_6 = D_4 x_1 x_2 x_8 + Y_4 \{x_5 - C_{q1}\epsilon(t) (x_5 + x_{11})\} \end{cases}$$

したがって, (11), (12) 式より伝達関数は

$$G(s) = \frac{b_3 \{(s-\mu)(c_3 s + c_1) + c_2\}}{s^3 - Z_1 s^2 + Z_2 s + Z_3} \quad (13)$$

となる. ここで,  $s$  はラプラス演算子である. また,  $Z_1 := \mu + a_9$ ,  $Z_2 := \mu a_9 - a_7$ ,  $Z_3 := \mu a_7 + a_8$  である.

紙面の制約により数値例は発表会場にて示す.

### 4. おわりに

本研究では, 収縮率の微分項および端部補正係数を考慮した McKibben 型人工筋の数理モデルを提案し, 伝達関数を導出した.

### 参考文献

- [1] 浦邊, 内藤, 小木曾: McKibben 型空気圧ゴム人工筋モデルの妥当性, 計測自動制御学会論文集, Vol.51, No.4, pp.267-273, 2015.
- [2] 大奇, 金安, 木山: 収縮率微分項を含む体積の動特性に基づくゴム空気圧アクチュエータのモデリング, 日本知能情報ファジィ学会第 85 回知的システム研究会 (SIC2024-1) 論文集, pp.23-26, 2024.
- [3] Y. Sugimoto, K. Naniwa and K. Osuka: "Static and Dynamic Characteristics of McKibben Pneumatic Actuator for Realization of Stable Robot Motions", IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, pp. 1817-1822, 2011.