

傾斜角度 55 度の階段状水路における局所摩擦抵抗係数に対するレイノルズ数の影響

Effects of Reynolds Number on Local Skin Friction Coefficients in a 55° Stepped Channel

○橋本大輝<sup>1</sup>, 佐藤柳言<sup>2</sup>, 高橋正行<sup>2</sup>

\*Daiki Hashimoto<sup>1</sup>, Ryugen Satoh<sup>2</sup>, Masayuki Takahashi<sup>2</sup>

Abstract: This study shows local skin friction coefficients for a wide range of Reynolds number in a 55° stepped channel. In the range of the Reynolds number is greater than  $4 \times 10^4$ , the local skin friction coefficients might be independent of the Reynolds number. An empirical equation for the local skin friction coefficients is proposed, developing the analytical calculation method for the water depth and the boundary layer thickness in the 55° stepped channel.

1. まえがき

階段状水路は、急傾斜水路を流下する射流の運動エネルギーを傾斜面上で減勢させる方法として利用されている[1],[2]。階段状水路上の流況は、水路傾斜角度  $\theta$  と相対ステップ高さ  $S/d_c$  ( $S$ : ステップ高さ,  $d_c [= \sqrt[3]{q^2/g}]$ : 限界水深,  $q$ : 単位幅流量,  $g$ : 重力加速度) によって変化する[1]。階段状水路で skimming flow (ステップの隅角部で常に渦の形成が認められる流況)[1]が生じるとき、流下とともに乱流境界層が発達し、やがて水面に到達して空気が混入し始める。この断面は inception point (以下 I.P. と略す) と呼ばれる[1]。I.P. の上流側では nonaerated skimming flow が形成され、I.P. の下流側では aerated skimming flow が形成される (Fig. 1 参照)。

Aerated skimming flow の水理特性については、従来の研究[1]-[3]で示されてきた。Aerated skimming flow の解析のためには、境界条件として、I.P. での水深と I.P. までの流下距離が必要となる[3]。すなわち、nonaerated skimming flow の水理特性を明らかにする必要がある。

Nonaerated skimming flow については、水深と乱流境界層厚の解析的計算法[4]が示され、限られた条件に対して検証された[4]。しかしながら、局所摩擦抵抗係数に対するレイノルズ数の影響は不明である。

本研究は、 $\theta = 55^\circ$  の階段状水路に対して、広範囲なレイノルズ数のもとで局所摩擦抵抗係数を検討し、nonaerated skimming flow の水深と乱流境界層厚の解析的計算法[4]を発展させたものである。

2. 実験

実験は、水路幅  $B = 50.0$  cm の長方形断面水路 (Fig. 1 参照)において、越流開始点 O から堰頂水平部終端 (点 a) までが広頂堰となり、点 a から点 b までが WES の標準型越流堰頂下流側の形状となるように調整された堰を設置して行われた。この堰の下流側に  $\theta = 55^\circ$  の階段状水路が接続されている。Skimming flow の生じる  $S/d_c$  を対象に、単位幅流量  $q$  を Table 1 のように調整した。ここに、 $Re [= q/\nu]$  はレイノルズ数,  $\nu [= \mu/\rho]$  は水の動粘性係数,  $\mu$  は水の粘性係数,  $\rho$  は水の密度である。

Edge 断面の水路中央面 ( $z = 0$ ) を対象に、水深  $d$  はポイントゲージを用いて測定された。また、時間平均流速  $\bar{u}$  は、ピトー管 (管径 3 mm, JIS-B8330) を用いて測定された。さらに、I.P. 付近の空気混入率  $C [= \text{空気の体積} / (\text{空気の体積} + \text{水の体積})]$  は、二点電極型ボイド率計 (採取時間 20 sec, 採取間隔 20 kHz) を用いて測定された。

3. 水深と乱流境界層厚の解析的計算法

堰上流側の断面① (Fig. 1) と階段状水路の任意な edge 断面 (断面③, Fig. 1) との間の自由水面に沿う流線にベルヌーイの定理を適用すると、乱流境界層外側の領域 ( $\delta \leq y \leq d$ ,  $y$  は仮想底面を原点とする垂直上向きの座標,  $\delta$  は乱流境界層厚,  $d$  は水深) のエネルギー損失は無視できる[5]ため、

$$1.5d_c + x \sin \theta = d \cos \theta + U^2/(2g) \quad (1)$$

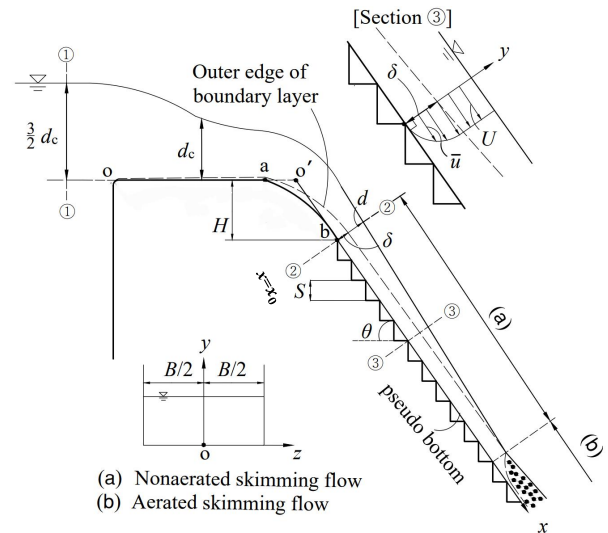


Figure 1. Definition sketch of a stepped channel

Table 1. Experimental conditions

$\theta$ (°)	$S$ (cm)	$S/d_c$ (-)	$q$ (m <sup>2</sup> /s)	$Re \times 10^{-4}$ (-)
55	2.5~10	0.2~0.8	0.0173~0.138	1.7~14

が示される。ここに、 $x$  は仮想底面 (pseudo bottom) に沿う堰頂からの流下方向座標,  $U$  は乱流境界層外側流速である。

Nonaerated skimming flow の edge 断面における時間平均流速  $\bar{u}$  の分布について、乱流境界層内 ( $0 \leq y \leq \delta$ ) では、

$$\bar{u}/U = (y/\delta)^{1/N} \quad \text{for } 0 \leq y \leq \delta \quad (2)$$

で近似され[4]、乱流境界層外 ( $\delta \leq y \leq d$ ) では、

$$\bar{u}/U = 1 \quad \text{for } \delta \leq y \leq d \quad (3)$$

となる[4]。式 (1) の両辺を  $x$  で微分して整理すると、

$$\frac{dd}{dx} = \frac{\sin \theta \left( \frac{d}{d_c} - \frac{1}{1+N} \frac{\delta}{d_c} \right)^3 - \frac{1}{1+N} \frac{d\delta}{dx}}{\cos \theta \left( \frac{d}{d_c} - \frac{1}{1+N} \frac{\delta}{d_c} \right)^3 - 1} \quad (4)$$

が得られる[4]。

階段状水路の仮想底面上でせん断応力  $\tau_0$  が生じるものと考えて流水抵抗を評価し、nonaerated skimming flow に運動量方程式を適用[4]して解くと、

$$\frac{d\delta}{dx} = \frac{(N+1)(N+2)}{2N} C_f - \left( 1 + \frac{N+2}{2N} \right) \frac{\delta}{x} \frac{\sin \theta - \frac{dd}{dx} \cos \theta}{\sin \theta + 1.5 \frac{d_c}{x} - \frac{d}{x} \cos \theta} \quad (5)$$

が得られる[4]。ここに、 $C_f [= \tau_0 / (\frac{1}{2} \rho U^2)]$  は局所摩擦抵抗係数である。すなわち、与えられた  $\theta, q, N, C_f$  に対する nonaerated skimming flow の水深と乱流境界層厚の流下方向変化は、式 (4) と式 (5) を用いて求められる。

1: 日大理工・院 (前)・土木 2: 日大理工・教員・土木

## 4. 結果

### 4.1. 流速分布

Nonaerated skimming flow の edge 断面における相対流速  $\bar{u}/U$  の分布の一例を **Fig. 2** に示す。ここに、 $x_0$  は階段状水路開始断面の座標である。なお、 $\delta$  の測定値は Satoh et al.<sup>[4]</sup> の方法で算出されている。**Fig. 2(a)** より、与えられた  $\theta$ ,  $S/d_c$ ,  $R_e$  に対して、 $\bar{u}/U$  の実験値の分布は  $(x-x_0)/d_c$  の値によらず概ね同一形状を示す。また、**Fig. 2(b)** より、与えられた  $\theta$ ,  $S/d_c$ ,  $(x-x_0)/d_c$  に対して、 $1.7 \times 10^4 \leq R_e \leq 1.4 \times 10^5$  の範囲では、 $\bar{u}/U$  の分布形に対する  $R_e$  の影響は認められない。**Fig. 2** 中の実線は式 (2) と擬似等流空気混入水流における  $N$  の実験式<sup>[2]</sup>

$$N = 14\theta^{-0.65} \frac{S}{d_c} \left( \frac{100 S}{\theta d_c} - 1 \right) - 0.041\theta + 6.27 \quad (\theta \text{ in deg.}) \quad (6)$$

より得られる  $\bar{u}/U$  の計算値である。式 (2) と式 (6) による計算値は、乱流境界層内の  $\bar{u}/U$  の実験値と決定係数  $R^2 = 0.74$  で一致した。

### 4.2. 局所摩擦抵抗係数

与えられた  $\theta$ ,  $S/d_c$ ,  $R_e$ ,  $(x-x_0)/d_c$  に対する  $C_f$  の間接測定値の一例を **Fig. 3(a)** に示す。**Fig. 3(a)** より、与えられた  $S/d_c$  に対して、同一の  $(x-x_0)/d_c$  では、 $R_e < 4 \times 10^4$  のとき、 $R_e$  の減少に伴い  $C_f$  の値は小さくなる。また、 $R_e \geq 4 \times 10^4$  の場合、 $C_f$  に対する  $R_e$  の変化の影響は小さい。 $R_e \geq 4 \times 10^4$  の場合の  $C_f$  の間接測定値の一例を **Fig. 3(b)** に各プロットで示す。**Fig. 3(b)** に示されるように、相対距離  $x/(S \cos \theta)$  の増加とともに  $C_f$  の値は小さくなる。擬似等流空気混入水流の摩擦抵抗係数は、 $R_e \geq 4 \times 10^4$  のとき、 $R_e$  に無関係となる<sup>[7]</sup> ことから、nonaerated skimming flow の  $C_f$  に対する  $R_e$  の影響は  $R_e \geq 4 \times 10^4$  で無視できるものと考え、 $\theta = 55^\circ$  の場合の  $C_f$  の実験式 ( $R_e \geq 4 \times 10^4$ ):

$$C_f = \left( 0.0512 + 0.00586 \frac{S}{d_c} \right) \left( \frac{x}{S \cos \theta} \right)^{-\frac{1.062}{N}} \quad \text{for } 0.2 \leq S/d_c \leq 0.8 \quad (7)$$

を提案する。式 (6) と式 (7) より得られる  $C_f$  の計算値の一例は、**Fig. 3(b)** に各線で示される。**Fig. 3(b)** に示されるように、与えられた  $\theta$  に対して、 $S/d_c$  の増加とともに同一の  $x/(S \cos \theta)$  での  $C_f$  は小さくなる。

### 4.3. 水深と乱流境界層厚の流下方向変化

与えられた  $\theta$  と  $S/d_c$  に対して、式 (4) ~ 式 (7) を用いて得られる  $d/d_c$  と  $\delta/d_c$  の計算値を **Fig. 4** に各線で示す。また、 $d/d_c$  と  $\delta/d_c$  の実験値を **Fig. 4** に各プロットで示す。なお、階段状水路開始断面 ( $x = x_0$ ) における  $d/d_c$  と  $\delta/d_c$  の実験値を解析計算の境界条件に与えた。**Fig. 4** より、与えられた  $\theta$  と  $S/d_c$  に対して、 $(x-x_0)/d_c$  の増加とともに、 $d/d_c$  は小さくなり、 $\delta/d_c$  は大きくなる。また、与えられた  $\theta$  に対して、 $S/d_c$  の減少とともに解析的に得られた  $\delta = d$  となる  $(x-x_0)/d_c$  は小さくなる。さらに、 $d/d_c$  の実験値と計算値の差は 0.060 以内、 $\delta/d_c$  の実験値と計算値の差は 0.041 以内である。

空気混入水流における水のに換算した水深 (clear water depth)  $d_w$  は、

$$d_w = \int_0^{y_{0.9}} (1 - C) dy = (1 - C_m) y_{0.9} \quad (8)$$

で定義されている<sup>[2],[6]</sup>。ここに、 $y_{0.9}$  は  $C = 0.9$  となる  $y$ 、 $C_m$  は断面平均空気混入率であり、

$$C_m = \frac{1}{y_{0.9}} \int_0^{y_{0.9}} C dy = \int_0^1 C d \left( \frac{y}{y_{0.9}} \right) \quad (9)$$

で定義される。与えられた  $\theta$  と  $S/d_c$  に対して、 $C$  の測定値から得られる  $d_w/d_c$  の一例を **Fig. 4** に示す。**Fig. 4** より、 $d/d_c$  の計算値と  $d_w/d_c$  の実験値はよく一致している。また、

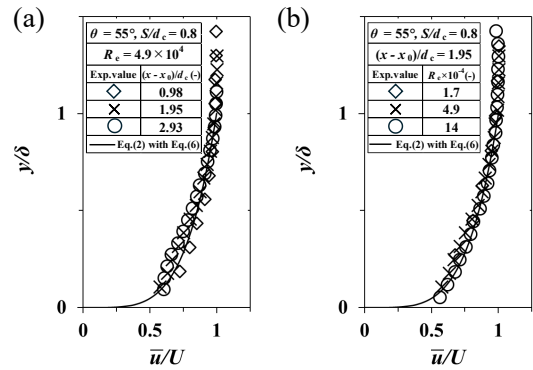


Figure 2. Velocity profiles

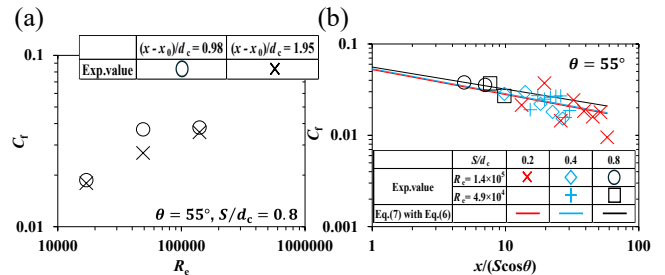


Figure 3. Local skin friction coefficients

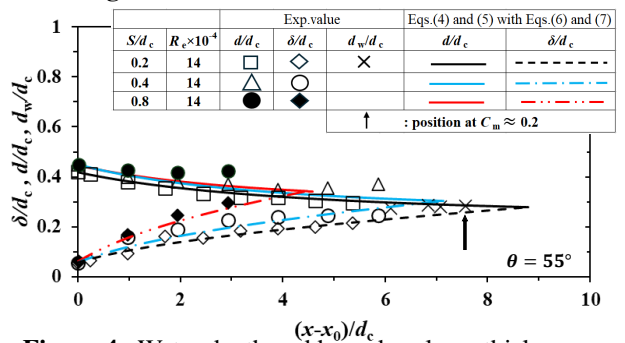


Figure 4. Water depth and boundary layer thickness

水深と乱流境界層厚の解析的計算法<sup>[4]</sup>から推定された  $\delta = d$  となる断面は、 $C_m \approx 0.2$  となる断面 (**Fig. 4** 中の矢印) と概ね一致していることが確認された。

## 5. まとめ

傾斜角度  $\theta = 55^\circ$  の階段状水路を対象に、nonaerated skimming flow の局所摩擦抵抗係数  $C_f$  に対するレイノルズ数  $R_e$  の影響を示した。また、 $C_f$  の間接測定値を求め、 $R_e \geq 4 \times 10^4$  のもとで  $C_f$  の実験式 (7) を提案した。これにより、nonaerated skimming flow の水深と乱流境界層厚の解析的計算法<sup>[4]</sup>の適用範囲が拡張された。さらに、解析的に得られた  $\delta = d$  となる I.P. は  $C_m \approx 0.2$  となる断面と概ね一致することを確認した。

## 参考文献

- [1] Ohtsu, I., Yasuda, Y., and Takahashi, M.: Flow characteristics of skimming flows in stepped channels, *J. Hydraul. Eng.*, 130(9), 860–869, 2004.
- [2] Takahashi, M. and Ohtsu, I.: Aerated flow characteristics of skimming flow over stepped chutes, *J. Hydraul. Res.*, 50(4), 427–434, 2012.
- [3] 高橋正行, 竜沢宗一郎, 大津岩夫: 階段状水路の skimming flow における空気混入不等流の水理特性, 土木学会論文集 B1(水工学), 73(4), L721–L726, 2017.
- [4] Satoh, R., Takahashi, M., and Ohtsu, I.: Analytical equations for depth and boundary-layer development on stepped channels, *Proc. 40th IAHR World Congress*, 1962–1970, Vienna, Austria, 2023.
- [5] Iwasa, Y.: Boundary layer growth of open channel flows on a smooth bed and its contribution to practical application to channel design, *Memoirs, Faculty of Eng., Kyoto Univ.*, 19(3), 229–254, 1957.
- [6] Chanson, H.: *The hydraulics of stepped chutes and spillways*, A.A. Balkema, Lisse, 2002.
- [7] Takahashi, M., Yasuda, Y., and Ohtsu, I.: Effect of Reynolds number on characteristics of skimming flows in stepped channels, *Proc. 31st IAHR Congress*, 2880–2889, Seoul, Korea, 2005.