

火星飛行機の飛行経路制御系の不安定ゼロダイナミクスの解析

Analysis of an Unstable Zero Dynamics in the Flight Path Control System of a Mars Airplane

○生稲 柁己¹, 安部 明雄², 森田 直人²

*Masaki Ikuina¹, Akio Abe² and Naoto Morita²

Abstract: This study focuses on the behavior of zero dynamics, which destabilizes the flight path control system of the Mars aircraft. The zero dynamics correspond to the numerator characteristics of the transfer function in a linear system. This paper analyzes the stability of zero dynamics based on a linearized model obtained via Taylor series expansion from a nonlinear affine system. Results of this Analysis revealed that the stable zero dynamics can become unstable due to changes in the lift caused by elevator control.

1. はじめに

一般に航空機の縦運動は、実数部が正の不安定零点を有する非最小位相系で表される。非線形系で、線形系の不安定零点を有する伝達関数の分子特性に相当するのが、不安定ゼロダイナミクスである。不安定ゼロダイナミクスが存在すると、制御系を機能させた場合に系の内部不安定化で応答の発散を招く場合がある。

この問題に対して、文献[1]でVTOL機のホバリング時のロール特性、文献[2]で固定翼機の着陸時のピッチ特性が不安定ゼロダイナミクスに変化し、内部不安定化することが述べられている。また、本稿で取り扱う火星飛行機は、入出力線形化法に基づいて飛行経路制御を行うと、文献[2]と同様に系が内部不安定化することが明らかになっている^[3]。ただし、文献[3]では、内部不安定化する過程について明らかにされていない。

そこで本稿では、線形解析を基に、文献[3]の内部不安定化の要因を明らかにすることを目的とする。

2. 制御対象の特性と入出力線形化法

本稿で取り扱う機体の特性を(1)式に示す。

$$\begin{bmatrix} \dot{V} \\ \dot{\gamma} \\ \dot{\theta} \\ \dot{Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g \sin \gamma - \frac{\rho V^2 S C'_D}{2m} \\ -g \cos \gamma + \frac{\rho V S C'_L}{2m} \\ Q \\ \frac{\rho V^2 S \bar{c} C'_M}{2I_{yy}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos(\theta - \gamma) & -\frac{\rho V^2 S C_{D\delta e}}{2m} \\ \sin(\theta - \gamma) & \frac{\rho V S C_{L\delta e}}{2m} \\ mV & 0 \\ 0 & \frac{\rho V^2 S \bar{c} C_{M\delta e}}{2I_{yy}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ \delta_e \end{bmatrix} \quad (1)$$

(1)式の制御対象で出力 \mathbf{y} を飛行速度 V と飛行経路角 γ として次の略記表現を用いる。

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u}(t) \quad (2)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}) = [h_1(\mathbf{x}), h_2(\mathbf{x})]^T = [V, \gamma] \quad (3)$$

(2), (3)式の制御対象は、入出力線形化法を適用すると、線形化可能な状態方程式の状態量を $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) = [V, \gamma]$ 、ゼロダイナミクスの状態量を $\boldsymbol{\eta} = [\theta, Q]$ として、次式に書き換えられる。ここで、 $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \mathbf{u}) \in \mathbf{R}^{2 \times 2}$ は、ゼロダイナミクスの特性を表す非線形関数ベクトルである。

$$\dot{\mathbf{h}}(\mathbf{x}) = L_f^1 \mathbf{h}(\mathbf{x}) + L_g^1 \mathbf{h}(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad (4)$$

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \mathbf{u}) \quad (5)$$

(4)式の右辺の演算記号は、 $L_f^1 \mathbf{h}(\mathbf{x}) = (\partial \mathbf{h} / \partial \mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbf{R}^{2 \times 1}$ 、 $L_g^1 \mathbf{h}(\mathbf{x}) = (\partial \mathbf{h} / \partial \mathbf{x})\mathbf{G}(\mathbf{x}) \in \mathbf{R}^{2 \times 2}$ で、リー微分を表す。この時点で(5)式のゼロダイナミクスは、機体のピッチング運動の特性を表し安定である。ここで、(4)式 of 非線形特性を相殺する線形化フィードバックは、(6)式で表される。ここで、 $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^{2 \times 1}$ は外生入力である。

$$\mathbf{u} = L_g^1 \mathbf{h}(\mathbf{x})^{-1} \times (-L_f^1 \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{v}) \quad (6)$$

(6)式を(5)式のゼロダイナミクスの入力 \mathbf{u} に代入すると、不安定なゼロダイナミクスとなる^[3]。

3. 線形解析

本節では、3.1項で制御対象(1)または(2)式の線形近似モデルを導出してその特性を評価し、3.2項で得られた線形近似モデルに入出力線形化法を適用してゼロダイナミクスの特性について評価する。

3.1 テイラー展開による線形近似モデル

(2)式 of 非線形アフィンシステムで、 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ 、 $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$ を基準としてテイラー展開を用いて線形近似すると、次式のように表すことができる。式中、 $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ 、 $\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_0$ と表記している。

$$\Delta \dot{\mathbf{x}}(t) = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{G}(\mathbf{x}_0)\Delta \mathbf{u} \quad (7)$$

(7)式の成分を(1)式の関数関係から解析的に求めると、次式のように表される。

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{V} \\ \Delta \dot{\gamma} \\ \Delta \dot{\theta} \\ \Delta \dot{Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta V \\ \Delta \gamma \\ \Delta \theta \\ \Delta Q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ 0 & 0 \\ 0 & b_{42} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta T \\ \Delta \delta_e \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\Delta \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \Delta \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \Delta \mathbf{u}(t) \quad (9)$$

また、出力方程式は、次式で表される。

$$\Delta \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}^T \Delta \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Delta \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \Delta V \\ \Delta \gamma \end{bmatrix} \quad (10)$$

(8)式の3, 4番目の状態方程式が、(5)式のピッチ特性を表すゼロダイナミクスに相当する。この2本の状態方程式の特性は、空力微係数 $M_{\Delta \alpha}$ と M_q に相当する a_{43} と a_{44} で定まる。通常、 a_{43} と a_{44} は、負の値でゼロダイナミクスの極は、安定な複素極となり Figure1 のような安定な平衡点を有する位相図になる。

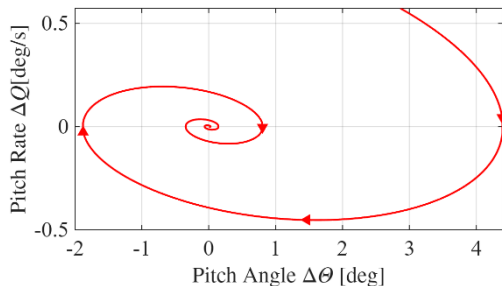


Figure 1. Phase Diagram of Zero Dynamics

3.2 入出力線形化法の適用

(6)式の線形化フィードバックに相当する、(8)式の1, 2番目の ΔV と $\Delta \gamma$ に関する状態方程式の特性を打ち消す制御則は、次式のように表すことができる。ここで、 $\Delta \mathbf{v} = [\Delta v_1, \Delta v_2]^T$ は外生入力である。

$$\mathbf{u} = \mathbf{C}^T \mathbf{B}^{-1} \times (-\mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \Delta \mathbf{v}) \quad (11)$$

また、外生入力 \mathbf{v} に次の制御則を適用する。

$$\Delta \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \Delta v_1 \\ \Delta v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_v \Delta V + \Delta v_1' \\ -k_\gamma \Delta \gamma + \Delta v_2' \end{bmatrix} \quad (12)$$

(11), (12)式の制御則を(8)式に適用すると、次式のように書き直される。

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{V} \\ \Delta \dot{\gamma} \\ \Delta \dot{\theta} \\ \Delta \dot{Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_1' & a_2' & a_3' & a_4' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta V \\ \Delta \gamma \\ \Delta \theta \\ \Delta Q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta v_1' \\ \Delta v_2' \end{bmatrix} \quad (13)$$

(13)式より、エレベータ操舵を入力、飛行経路角を出力とする伝達関数は、次式で表される。

$$\frac{\Delta \gamma(s)}{\Delta v_2'(s)} = \frac{(s + k_v)(s^2 - a_4's - a_3')}{(s + k_v)(s + k_\gamma)(s^2 - a_4's - a_3')} \quad (14)$$

(14)式で、 $s = -k_v, -k_\gamma$ は安定となるようにゲイン設定するため、(15)式の極がゼロダイナミクスの安定性を決定する。

$$s = (-a_4' \pm \sqrt{a_4'^2 - 4a_3'})/2 \quad (15)$$

ここで、 $a_4' = a_{44}$ であり、 a_3' は次式で表される。

$$a_3' = a_{43} - \frac{\rho V_0^3 S \bar{c} \partial C_L' C_{M\delta e}}{2I_{yy} \partial \theta C_{L\delta e}} \quad (16)$$

機体固有のゼロダイナミクスの特性では、極の根号の中が負の値で安定な複素極になった。一方で、制御則を適用した(15)式の極は、エレベータ操舵が直接揚力に与える効果を表す微係数 $C_{L\delta e}$ の影響で(16)式の右辺第2項が生じ、 a_3' が負の値に変化して、2つの正負の実数極となる性質がある。よって、Figure2 のような Saddle Point を有する位相図に変化する。

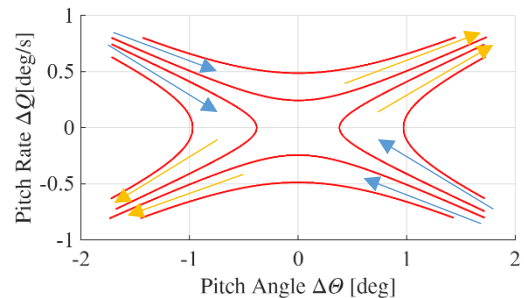


Figure 2. Phase Diagram of Zero Dynamics

Figure2 のゼロダイナミクスの位相図は、原点近傍に鞍点(Saddle Point)が存在する。図中左上と右下の鞍点に向かう軌道が安定な挙動で、図中左下と右上の鞍点から離れる軌道が不安定な挙動を表している。

4. まとめ

本稿では、火星飛行機の入出力線形化法を用いた飛行経路制御系で、ゼロダイナミクスが不安定化する原因を明らかにした。制御対象の非線形モデルを線形近似し、ゼロダイナミクスの極を評価した。その結果、飛行経路を制御した際に、エレベータ操舵が揚力に直接与える影響で、機体のピッチ特性が不安定化することを明らかにした。

5. 参考文献

- [1] J. Hauser, S. Sastry, and G. Meyer: Nonlinear Control Design for Slightly Non-minimum Phase Systems: Application to V/STOL Aircraft: *Automatica*, Vol. 28, No. 4, pp. 665-675, 1992.
- [2] Claire Tomlin, John Lygeros, Luca Benvenuti, and Shankar Sastry: Output Tracking for a Non-Minimum Phase Dynamic CTOL Aircraft Model: *Proc. IEEE conf. Decision and Control*, pp.1867-1872, 1995.
- [3] 星亮太郎, 安部明雄: 火星飛行機のバックサイド領域でのフラットネスを用いた適応型飛行経路制御系, 第62回飛行機シンポジウム, 1D16, 2024.