O-2

厳密繰り込み群によるトポロジカル項の非繰り込み性

Non-Renormalization of Topological Terms in the Exact Renormalization Group

○田中太一[1] *Taichi Tanaka[1]

Abstract : It has long been known perturbatively that topological terms are not renormalized. However, general non-perturbative proofs are scarce. We constructed the exact renormalization group (ERG) in a path integral defined on a configuration space $\mathcal{M}$ with fundamental group $\Gamma = \pi_1(\mathcal{M})$. The ERG is the group generated by renormalization transformations R_t, a one-parameter family of maps acting on the action S by rescaling the cutoff Λ. In conclusion, while the amplitudes in the path integral, the topological phase factors arising from $\pi_1(\mathcal{M})$ remain strictly invariant under the exact renormalization group transformation.

1. 導入

トポロジカル項が繰り込まれないことは摂動論的には古くから知られている．しかし非摂動論的な一般証明は少ない．

本研究では，普遍被覆表示と固定端境界条件つきの経路積分を定義し，厳密繰り込み群（Exact Renormalization Group）[1] により，**任意の配置空間** $\mathcal{M}$ の基本群 $\pi_1(\mathcal{M})$ から生じる一次元表現 $\chi : \pi_1(\mathcal{M}) \to U(1)$ に由来するトポロジカル位相因子が，有限の繰り込み群変換で不変になることを示す．固定端条件のため，標準的な ϕ^4 の繰り込み群変換をそのまま適用することはできない．

そこで，被覆空間と Deck 変換（基本群の作用）[2] を明示的に扱う境界条件つきに基づき繰り込み群変換を構成する．まず Segal–Bargmann 変換 [3] により経路積分を厳密に粗視化し，トポロジカル位相が不変であることを示す．次に，この粗視化を用いて最も一般的な定義 [4] から，厳密繰り込み群変換をスケール変換の相似変換として構成し，任意の $\pi_1(\mathcal{M})$ に対してトポロジカル位相因子が繰り込まれないことを示す．

2. 厳密繰り込み群変換

繰り込み群とは，繰り込み群変換の集合であり（一般には半群とされるが，今回の定義では群になる），各繰り込み群変換は作用 S に含まれるカットオフ Λ を別スケールへ写像する変換 R_t である．これはパラメータ t による一係数族の変換であり，

$$R_t : \mathcal{S} \to \mathcal{S}, \tag{1}$$

$$R_t(S) = S_t, \qquad S, S_t \in \mathcal{S} \tag{2}$$

と定義し，生成汎函数は不変とする．

相関関数のスケーリング則を満たすように，熱演算子とスケール変換を用いて

$$R_t \equiv \widetilde{\mathcal{R}}_\Gamma^{-1} \circ \tilde{D}_t \circ \widetilde{\mathcal{R}}_\Gamma \tag{3}$$

と定義する．具体的な定義は後ほど行う．ここでスケール変換は

$$\tilde{D}_t :\ C_\Lambda \mapsto C_{e^{-t}\Lambda} \tag{4}$$

となるような変換とする．

3. 一般配置空間における経路積分

配置空間を $\mathcal{M}$，基本群を $\Gamma = \pi_1(\mathcal{M})$ とする．普遍被覆空間 $\pi : \widetilde{\mathcal{M}} \to \mathcal{M}$ と Deck 変換 [2] を用いると，固定端を保つ経路積分のユークリッド時間発展核は

$$\begin{aligned} &K^E(x, \tau_f; y, \tau_i \mid J) \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{g\in\Gamma} \rho(g) \int_{\substack{\phi(\tau_i)=y \\ \phi(\tau_f)=g\cdot x}} \mathcal{D}_E\phi\ e^{-S_E\{\phi;J\}}. \end{aligned} \tag{5}$$

ここで $x, y \in \widetilde{\mathcal{M}}$ は端点，$g \cdot x$ は Deck 変換による作用である．$\rho : \Gamma \to U(1)$ は位相因子（一次元表現）である．

離散化幅 $\varepsilon_E = (\tau_f - \tau_i)/N$ の下で測度は

$$\mathcal{D}_E\phi = \Big(\frac{m}{2\pi\varepsilon_E}\Big)^{Nd/2} \prod_{k=1}^{N-1} d\phi_k, \tag{6}$$

作用は

$$\begin{aligned} S_E\{\phi; J\} = &\sum_{k=0}^{N-1} \frac{m}{2\varepsilon_E} (\phi_{k+1} - \phi_k, \phi_{k+1} - \phi_k) \\ &+ \sum_{k=0}^{N-1} \Big[\varepsilon_E V(\phi_k) - \varepsilon_E J_k \cdot \mathcal{O}(\phi_k)\Big] \end{aligned} \tag{7}$$

と定義する．

4. カットオフ関数と運動項の対角化

高周波モードを滑らかに抑制する単調非増加・正値のカットオフ関数 $K(z)$ を境界条件を守るために，対角化した運動項に導入する．まず，以下のような固有ベクトルと固有値

$$u_k^{(n)} = \sqrt{\frac{2}{N}} \sin\Big(\frac{\pi n k}{N}\Big) \tag{8}$$

$$\lambda_n = 4 \sin^2\Big(\frac{\pi n}{2N}\Big) \tag{9}$$

によって経路を

$$\phi_k = \phi_{g,k}^{\mathrm{cl}} + \delta\phi_k \tag{10}$$

と分解する．ここで

$$\delta\phi_0 = \delta\phi_N = 0, \qquad \delta\phi_{a,k} = \sum_{n=1}^{N-1} u_k^{(n)}\, q_n^a \tag{11}$$

[1] 日大理工・院 (後)・量子

とする．これによって対角化した運動項に対して

$$S_{\rm kin}[\phi] = S_{\rm end}(g) + \tfrac{1}{2}\,(q, C_\Lambda^{-1} q) \tag{12}$$

のようにカットオフ関数を導入することができる．カットオフ入りプロパゲータは

$$C_\Lambda = \frac{\varepsilon_E}{m}\,\frac{K(\lambda_n/\Lambda^2)}{Z(\Lambda)\,\lambda_n} \tag{13}$$

とした．したがって裸作用は

$$S_0[q;g] = S_{\rm end}(g) + \tfrac{1}{2}\,(q, C_\Lambda^{-1} q) + V[q] - S_{\rm src}(J;q,g) \tag{14}$$

となる．

5. 厳密繰り込み群変換の導出

基本群に関して普遍な演算子の集合を

$$O_i \in {\rm Inv}_\Gamma(\mathcal{O}) \tag{15}$$

と定義する．正規順序積をとった相関関数を **修正相関関数** [4] と呼ぶ．厳密繰り込み群変換の原理は，この修正相関関数に対して

$$\Big\langle :\prod_{i=1}^{n} O_i(\phi(x_i)):_{C_\Lambda} \Big\rangle_{S_t} = e^{\sum_i \Delta_{O_i} t} \Big\langle :\prod_{i=1}^{n} O_i(\phi(e^t x_i)):_{C_\Lambda} \Big\rangle_{S_0} \tag{16}$$

が成り立つように要請することである．ここで Δ_{O_i} は演算子のスケーリング次元である．この要請から正規順序積をとった生成汎函数のスケーリング則は

$$\widetilde{Z}_t[J] = \widetilde{Z}_0[\tilde{D}_t^\dagger J] \tag{17}$$

と描くことができる．ここで，対応するスケール変換は

$$(\tilde{D}_t^\dagger J)(x) = e^{(\Delta_O - d)t}\, J(e^{-t}x) \tag{18}$$

と定義した．

　プロパゲータは普遍被覆 $\widetilde{\mathcal{M}}$ 上で定義した．すなわち $\widetilde{C}_\Lambda(\tilde{x},\tilde{y})$ を普遍被覆空間 $\widetilde{\mathcal{M}}$ 上のプロパゲータとし，配置空間 $\mathcal{M}$ 上のプロパゲータは

$$C_\Lambda(x,y) = \sum_{g\in\Gamma} \rho(g)\, \widetilde{C}_\Lambda(\tilde{x},\, g\cdot\tilde{y}), \quad \pi(\tilde{x}) = x,\ \pi(\tilde{y}) = y \tag{19}$$

で与えた．熱演算子は

$$\mathcal{R}_g = e^{\frac{1}{2}(\frac{\delta}{\delta\varphi},\, C_{\Lambda,g}\,\frac{\delta}{\delta\varphi})}, \quad C_{\Lambda,g}(x,y) = \widetilde{C}_\Lambda(x,\, g\cdot y), \tag{20}$$

とし，粗視化演算子は

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{R}}^{(g)}_{\Lambda\to\Lambda'} =& e^{-\frac{1}{2}(\varphi,\,(C^{-1}_{\Lambda',g} - C^{-1}_{\Lambda,g})\,\varphi)} \\ &\times e^{\frac{1}{2}(\frac{\delta}{\delta\varphi},\,(C_{\Lambda',g} - C_{\Lambda,g})\,\frac{\delta}{\delta\varphi})}\end{aligned} \tag{21}$$

と定義する．ここで $\Lambda' = e^{-t}\Lambda$ である．

　以上より，繰り込み群変換 R_t を

$$R_t = \widetilde{\mathcal{R}}_\Gamma^{-1} \circ \tilde{D}_t \circ \widetilde{\mathcal{R}}_\Gamma, \qquad e^{-S_t[\phi]} = R_t\, e^{-S_0[\phi]} \tag{22}$$

と定義する．S_t は

$$\begin{aligned}S_t[\phi;g] =& S_{\rm end}(g) + \tfrac{1}{2}(\phi, C^{-1}_{e^{-t}\Lambda,g}\phi) \\ &+ V_0\big(e^{-\Delta_\phi t}\,\phi(e^{-t}\cdot)\big)\end{aligned} \tag{23}$$

となる．ここで

$$\tilde{D}_t\, C_{\Lambda,g}\, \tilde{D}_t^\dagger = C_{e^{-t}\Lambda,g} \tag{24}$$

を満たすように $\tilde{D}_t$ を定義した．ただし

$$\Delta_\phi = \tfrac{d-2+\eta}{2}, \quad \eta(\Lambda) = -\tfrac{d\log Z(\Lambda)}{d\log\Lambda} \tag{25}$$

とする．

6. 基本群 $\pi_1(\mathcal{M})$ によるトポロジカル項の厳密繰り込み群変換不変性

ユークリッド時間発展核は

$$\begin{aligned}&K^E(x,\tau_f; y,\tau_i \mid J) \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{g\in\Gamma} \rho(g) \int_{\substack{\phi_0 = y \\ \phi_N = g\cdot x}} \mathcal{D}_E\phi\; e^{-S_E\{\phi;J\}}\end{aligned} \tag{26}$$

である．ここで構成した繰り込み群変換はすべて実数の指数演算子から成るため，実値の汎関数を実値の汎関数へ写す．従って**非摂動論的に**複素位相因子 $\rho(g) \in U(1)$ は繰り込み群変換の作用を受けず，不変に保たれる．

7. まとめ

普遍被覆と Deck 変換を用いた固定端条件を課した経路積分に対し，熱演算子と粗視化演算子を基本群の作用を明示して拡張し，厳密繰り込み群変換を構成した．その結果，繰り込み群変換は実数演算子の合成であるため，基本群に由来する複素位相因子 $\rho(g)$ は常にそのまま保持され，不変であることが示された．

A. Segal–Bargmann 変換

Segal–Bargmann 変換 [3] はガウス積分を二階微分演算子へ写す：

$$(\mu_G * F)(\phi) = \int d\mu_G(\psi)\, F(\phi+\psi) \tag{27}$$

ここで

$$d\mu_G(\psi) \propto e^{-\frac{1}{2}(\psi, G^{-1}\psi)} [d\psi] \tag{28}$$

を用いると

$$(\mu_G * F)(\phi) = e^{\frac{1}{2}(\frac{\delta}{\delta\phi},\, G\,\frac{\delta}{\delta\phi})} F(\phi) \tag{29}$$

と書ける．本稿では $G = C_{\Lambda,g}$（あるいは $C_{\Lambda',g}$）を用いた．

参考文献

[1] K. G. Wilson and J. B. Kogut, “The Renormalization Group and the ε Expansion,” *Phys. Rept.* **12** (1974) 75–200.

[2] J. S. Dowker, “Quantum mechanics on multiply connected spaces,” J. Phys. A **5**, 936 (1972).

[3] P. Cartier and C. DeWitt-Morette, *Functional Integration: Action and Symmetries.* Cambridge University Press, 2010.

[4] H. Sonoda, “Equivalence of Wilson Actions,” *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2015** (2015) 103B01.