

四次元二次重力理論のタキオン問題とゴーストパズル

On the tachyon problem and ghost puzzle in quadratic gravity in 4D

○川原浩龍¹

*Koryu Kawahara¹

Abstract : Quadratic gravity is known to be perturbatively renormalizable and asymptotically free, thus providing a possible candidate of quantum gravity. However, it suffers from some serious drawbacks. In this talk, we review the tachyon problem as well as the ghost puzzle in quadratic gravity and their possible resolutions.

1. 導入

四次元時空では、曲率の一次からなる Einstein 重力理論は摂動的に繰り込み不可能だが、曲率の二次まで含んだ二次重力理論は摂動的に繰り込み可能であり、さらに漸近的自由性を示すことが知られている（講義録 [1] 参照）。このことから、二次重力理論は量子重力理論の1つの候補とされてきた。ただし、最小引算法を用いた通常の繰り込み群解析では、漸近的自由性が成立するパラメータ領域にはタキオンが存在することも知られており、二次重力理論の1つの問題であった。最近、このタキオン問題に関して1つの進展があった。2024年、Buccioらは散乱振幅に基づく新しい繰り込み群解析を提案し、その方法では漸近的自由性が成り立つパラメータ領域にタキオンは存在しないことを示したのである [2]。ただし、Buccioらの結果は1ループ近似にとどまっており、また従来の最小引算法による結果との関係もまだ正確には解明されていない。

以下では二次重力理論の伝播関数を導出したあと、Buccioらの繰り込み群解析を用いるとタキオン問題が回避されることを論じる。また、二次重力理論における未解決問題であるゴーストによるユニタリー性の破れおよびその解決案についても論じる。本研究は主に文献 [1] に基づくレビューである。

2. 二次重力理論の伝播関数

二次重力理論は作用に曲率テンソルの二次まで含む重力理論で、四次元時空では全微分項を除いて一般に次のように表される。

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{\kappa^2} (R - 2\Lambda) + \frac{1}{6g_0} R^2 - \frac{1}{2g_2} C_{\mu\nu\rho\sigma}^2 \right]$$

ここで、 R は Ricci スカラー、 $C_{\mu\nu\rho\sigma}$ は Weyl テンソルで、Schouten テンソル $P_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(R_{\mu\nu} - \frac{1}{6}g_{\mu\nu}R)$ を用いて $C_{\rho\sigma}^{\mu\nu} = R_{\rho\sigma}^{\mu\nu} - \delta_{[\rho}^{\mu} P_{\sigma]}^{\nu]}$ で定義される。ただし、 $g_{\mu\nu}$ は計量、 $R_{\mu\nu}$ は Ricci テンソル、 $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ は曲率テンソルであり、 $[\ast, \ast]$ は添え字の反対称化を表す（規格化はしていない）。また Λ は宇宙項、 $\{\kappa, g_0, g_2\}$ は結合定数で、質量次元はそれぞれ $\{-1, 0, 0\}$ である。以下では $\Lambda = 0$ とし、Minkowski 時空まわりの揺らぎを考えることで伝播関数を求め、二次重力理論の物理的自由度を明らかにする。

まず Minkowski 計量を $\eta_{\mu\nu}$ とし、そのまわりの揺らぎを $h_{\mu\nu}$ として計量を $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + 2h_{\mu\nu}$ と表す。そして、ゲージ固定項として次の形のものを採用する。

$$S_{\text{gf}} = -\frac{1}{\alpha\kappa^2} \int d^4x F_{\mu} \mathcal{Y}^{\mu\nu} F_{\nu}$$

ただし、

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}^{\mu\nu} &= \eta^{\mu\nu}(1 + \gamma\Box) + \chi\partial^{\mu}\partial^{\nu} \\ F_{\mu} &= \partial^{\rho}h_{\rho\mu} - \frac{1+\beta}{4}\eta^{\rho\sigma}\partial_{\mu}h_{\rho\sigma} \end{aligned}$$

である。ここで、 $\alpha, \beta, \gamma, \chi$ はゲージ固定のパラメータ（ゲージパラメータ）である。 $S + S_{\text{gf}}$ を $h_{\mu\nu}$ の二次まで展開し、運動演算子のインバースを計算すると、運動量表示での伝播関数 \mathcal{G}_{qg} が次のように求まる。

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\text{qg}} &= \frac{\kappa^2}{ip^2} \left[\frac{m_2^2 \mathcal{P}^{(2)}}{p^2 + m_2^2} - \frac{1}{2} \frac{m_0^2 \mathcal{P}^{(0,s)}}{p^2 + m_0^2} + \frac{\alpha \mathcal{P}^{(1,m)}}{1 - \gamma p^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{m_0^2/2}{p^2 + m_0^2} \left\{ \left(\sqrt{3} \frac{\beta + 1}{\beta - 3} \right)^2 \mathcal{P}^{(0,w)} - \sqrt{3} \frac{\beta + 1}{\beta - 3} \mathcal{P}^{(0,x)} \right\} \right] \end{aligned}$$

ただし $m_j^2 = g_j/\kappa^2$ ($j = 0, 2$) である。また、 $\mathcal{P}^{(2)}, \mathcal{P}^{(0,2)}, \mathcal{P}^{(1,m)}, \mathcal{P}^{(0,w)}, \mathcal{P}^{(0,x)}$ はスピン射影演算子で、そのテンソル成分は次式で定義される。

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\mu\nu\rho\sigma}^{(2)} &= \frac{1}{2}\theta_{\mu\{\rho}\theta_{\sigma\}\nu} - \frac{1}{3}\theta_{\mu\nu}\theta_{\rho\sigma} \\ \mathcal{P}_{\mu\nu\rho\sigma}^{(1,m)} &= \frac{1}{2}(\theta_{\mu\{\rho}\omega_{\sigma\}\nu} + \omega_{\mu\{\rho}\theta_{\sigma\}\nu}) \\ \mathcal{P}_{\mu\nu\rho\sigma}^{(0,s)} &= \frac{1}{3}\theta_{\mu\nu}\theta_{\rho\sigma}, \quad \mathcal{P}_{\mu\nu\rho\sigma}^{(0,w)} = \omega_{\mu\nu}\omega_{\rho\sigma} \\ \mathcal{P}_{\mu\nu\rho\sigma}^{(0,x)} &= \frac{1}{\sqrt{3}}\theta_{\mu\nu}\omega_{\rho\sigma} + \frac{1}{\sqrt{3}}\omega_{\mu\nu}\theta_{\rho\sigma} \end{aligned}$$

ここで、 $\omega^{\mu\nu} = \frac{p^{\mu}p^{\nu}}{p^2}$ および $\theta^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \omega^{\mu\nu}$ であり、 $\{\ast, \ast\}$ は添え字の対称化を表す。

次に、二次重力の物理的自由度を同定するため \mathcal{G}_{qg} のうちゲージパラメータに依存しない項を考える。これは

$$\begin{aligned} &\frac{\kappa^2}{ip^2} \left[\frac{m_2^2}{p^2 + m_2^2} \mathcal{P}^{(2)} - \frac{1}{2} \frac{m_0^2}{p^2 + m_0^2} \mathcal{P}^{(0,s)} \right] \\ &= \frac{\kappa^2}{ip^2} \left[\mathcal{P}^{(2)} - \frac{1}{2} \mathcal{P}^{(0,s)} \right] - \frac{1}{i} \frac{\kappa^2 \mathcal{P}^{(2)}}{p^2 + m_2^2} + \frac{1}{2i} \frac{\kappa^2 \mathcal{P}^{(0,s)}}{p^2 + m_0^2} \end{aligned}$$

である。この第1項は Einstein 重力理論と同じで、無質量スピン2の自由度の寄与である。一方、第2項は二乗

¹ 日大理工・院(前)・量子

質量が $m_2^2 = g_2/\kappa^2$ の有質量スピン2の自由度に対応し、第3項は二乗質量が $m_0^2 = g_0/\kappa^2$ の有質量スピン0の自由度に対応する。したがって、二次重力理論の物理的自由度は合計で $2+5+1=8$ である。負の二乗質量（すなわちタキオン）を回避するためには $g_0 > 0$ かつ $g_2 > 0$ が必要であることを注意したい。

3. 結合定数の1ループβ関数とタキオン問題

局所場の量子論が摂動的に繰り込み可能かどうかは、結合係数の質量次元を見れば良い。Einstein 重力の場合は結合係数 κ は負の質量次元を持つので摂動的に繰り込み不可能である。一方、二次重力の場合は伝播関数や頂点は高エネルギーで p^4 支配的なので、無次元の結合定数 g_j によって支配され、摂動的に繰り込み可能である。より定量的な二次重力理論の高エネルギーでの振る舞いを見るには、繰り込み群を用いて g_0 と g_2 の繰り込みスケール依存性を調べれば良い。最小引算法を用いると、繰り込み群のβ関数は1ループ近似の下で次で与えられる。

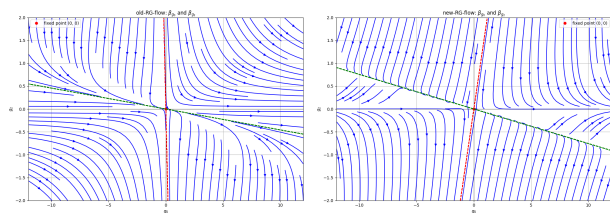
$$\beta_{g_0}^{old} = \frac{5}{3}(2g_2^2 + 6g_0g_2 + g_0^2), \quad \beta_{g_2}^{old} = -\frac{133}{5}g_2^2$$

このβ関数から定まる繰り込み群のフローを Fig. 1(a) に示す。この図から明らかだが、 $g_0 < 0$ かつ $g_2 > 0$ の領域では理論は Gauss 固定点に収束する。すなわち漸近自由である。ただし、 $g_0 < 0$ のためタキオンが存在する。これがタキオン問題である。

2024年、Buccioらは上のβ関数で記述される結合定数のスケール依存性は、二次重力理論のような高階微分項を含む理論では散乱振幅の外線運動量を変化させていった時のスケール依存性とは異なることを指摘し、散乱振幅に基づくより物理的な繰り込み群解析を提案した。彼らの方法では1ループβ関数は

$$\beta_{g_0}^{new} = -\frac{70g_2^2 - 6g_0g_2 - g_0^2}{3}, \quad \beta_{g_2}^{new} = -\frac{(539g_2 + 40g_0)g_2}{15}$$

となり、このβ関数から定まる繰り込み群のフローは Fig. 1(b) のようになる。この図を見ると、 $g_0 > 0$ かつ $g_2 > 0$ の領域でも Gauss 固定点に収束する唯一の繰り込み群のフローが存在し、それは赤い線である。すなわちBuccioらの方法ではタキオン問題が回避されるのである。ただし、この結果は1ループ近似にとどまっており、また従来との関係性は正確には分かっていない [3]。



(a) Minimal subtraction. (b) Buccio et al.

Fig. 1: Renormalization group flow of g_0 and g_2 .

4. ゴーストパズル

二次重力理論における未解決問題としてゴーストの存在によるユニタリー性の破れがある。最後にこの問題とその解決案を見ておく。簡単のため、以下では \mathcal{G}_{qg} のスピン2成分と同じ極構造を持つスカラー場の伝播関数

$$\mathcal{G} = \frac{1}{ip^2} \frac{m^2}{p^2 + m^2} = \frac{1}{i} \left[\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2 + m^2} \right]$$

を用いる。

まずユニタリー性が成り立つためには $\text{Im}[\frac{1}{i}(\frac{1}{i})^2\mathcal{G}] \geq 0$ である必要があるが、伝播関数の極に対して因果的 $i\epsilon$ 処方 $p^2 \rightarrow p^2 - i\epsilon$ を適用した場合、 $\frac{1}{x \pm i\epsilon} = \text{p.v.}(\frac{1}{x}) \mp i\pi\delta(x)$ より、

$$\text{Im}[i\mathcal{G}] = \pi[\delta(p^2) - \delta(p^2 + m^2)]$$

となり一般にユニタリー性は満たされない。ユニタリー性を満たすためには、伝播関数に対する因果的 $i\epsilon$ 処方と物理的状態に対するノルムの正定値性のどちらかもしくは両方を修正する必要がある。これには次の3つのアプローチがある。

まず一つ目は因果的 $i\epsilon$ 処方 $p^2 \rightarrow p^2 - i\epsilon$ はそのままにして負のノルムを許容する方法である。負のノルム（つまり負の確率）の存在は異常現象とみなされているが、最近ではこれに新たな量子解釈の可能性が検討されている。

二つ目は正のノルムのままにして、 \mathcal{G} の第2項を反因果的 $i\epsilon$ 処方 $p^2 \rightarrow p^2 + i\epsilon$ にする方法である。この場合、 $\text{Im}[i\mathcal{G}] = \pi[\delta(p^2) + \delta(p^2 + m^2)]$ となりユニタリー性は満たされるが、因果的 $i\epsilon$ 処方と反因果的 $i\epsilon$ 処方の両方を許容しなければならず、因果律が破れるかもしれない。

三つ目はゴーストを off-shell 自由度に変換する方法で、 \mathcal{G} の第2項を $\frac{i}{p^2 + m^2} \rightarrow i \frac{p^2 + m^2}{(p^2 + m^2)^2 + \epsilon^2} = \frac{i}{2} [\frac{1}{p^2 + m^2 - i\epsilon} + \frac{1}{p^2 + m^2 + i\epsilon}]$ と変換する方法である。この場合、 $\text{Im}[i\mathcal{G}] = \pi\delta(p^2)$ となる。これはゴーストは on-shell で現れることができないことを意味し、ゴーストのような状態を物理的 Hilbert 空間から射影することで実現できる。ただし、二つ目と同じ理由で因果律は破れるかもしれない。

5. まとめ

二次重力理論は摂動的繰り込み可能かつ漸近自由な重力理論であり、量子重力理論の1つの候補である。ただし、いくつかの深刻な問題点もある。本研究では二次重力理論のタキオン問題とそれに対するBuccioらの解決方法、そしてゴーストパズルに対する3つの解決案に対してレビューを行った。

参考文献

- [1] I. Basilo et al., arXiv:2412.08690.
- [2] D. Buccio et al., *Phys. Rev. Lett.* **133** (2024) 02160.
- [3] H. Kawai and N. Ohta, *Phys. Lett.* **B855** (2024) 138863.