O-6

動的なブラックホールにおけるエントロピーカレント
An entropy current for dynamical black holes

○尾形大地[1]
*Ogata Taichi[1]

Abstract: In this presentation, we review a proposal given by S.Bhattacharyya et. al. for an entropy of a dynamical black hole. They considered small perturbations around the stationary geometry and required that the entropy satisfies the second law. Then, the entropy current is identified with terms in certain component of the equation of motion.

１．導入

本発表では [1] において提案された、動的なブラックホールにおけるエントロピーカレントについてレビューする。定常的なブラックホールのエントロピーは Wald エントロピー [2,3] として知られている。[1] では、定常解に微小な揺らぎを加えた時空が議論され、熱力学第二法則が成り立つことを要請して、動的なブラックホールのエントロピーカレントが提案されている。こうして提案されたエントロピーは定常的な極限では、Wald エントロピーに帰着する。

２．座標の設定

次のような計量で記述される、d 次元時空 [4] を考える。

$$\begin{aligned} ds^2 &= 2dvdr - r^2X(v,r,x)dv^2 \\ &\quad + 2r\omega_i(v,r,x)dvdx^i + h_{ij}(v,r,x)dx^i dx^j \end{aligned} \tag{1}$$

この時空では $r=0$ の位置にホライゾンがあり、(1) はホライゾン近傍の時空を表している。v、$x^i(i=1,\cdots,(d-2))$ はホライゾンに沿った座標であり、特に v はホライゾン上での時間座標の役割を担う。

３．ブースト変換の定義とテンソルの変換性

以下の変換をブースト変換と呼ぶ。

$$r \to \tilde{r} = \lambda r, \quad v \to \tilde{v} = \frac{v}{\lambda} \tag{2}$$

この変換の無限小変換は、以下のような生成子によって生成される。

$$\xi = \xi^\mu \partial_\mu = v\partial_v - r\partial_r \tag{3}$$

計量関数が $\{X(vr,x^i), \omega_i(vr,x^i), h_{ij}(vr,x^i)\}$ のように (vr,x^i) の関数で表される場合、時空は定常であり、(3) が Killing ベクトルになる。[1] では、定常的な計量 $g^{eq}_{\mu\nu}$ に微小な揺らぎの項 $\epsilon\delta g_{\mu\nu}$ が加わった動的な時空が考えられている。

$$g_{\mu\nu} = g^{eq}_{\mu\nu} + \epsilon\delta g_{\mu\nu} \quad (\epsilon \ll 1) \tag{4}$$

一般座標変換の下で不変な重力理論におけるテンソルは、計量関数 $\{X(v,r,x^i), \omega_i(v,r,x^i), h_{ij}(v,r,x^i)\}$ と微分演算子 $\{\partial_v, \partial_r, \nabla_i\}$ 及び r から作られる。テンソルの成分 $\mathcal{A}$ がブースト変換の下で、以下のように変換される場合に、w を $\mathcal{A}$ のブースト重みと呼ぶ。

$$\mathcal{A}(v,r,x^i) \to \tilde{\mathcal{A}}(\tilde{v},\tilde{r},x^i) = \lambda^w \mathcal{A}(v,r,x^i) \tag{5}$$

$\mathcal{A}$ の下付き v の数と下付き r の数の差が $\mathcal{A}$ のブースト重みに一致する。

$$w = (\text{下付き } v \text{ の数}) - (\text{下付き } r \text{ の数}) \tag{6}$$

また、r, v のブースト重みはそれぞれ $+1$、-1 であり、計量関数 $\{X, \omega, h_{ij}\}$ はブースト重みが 0 であることが言える。定義から、$\partial_v, \partial_r, \nabla_i$ のブースト重みはそれぞれ $+1$、-1、0 である。正のブースト重みを持つ項は、定常解の場合には値が 0 になり、非定常解の場合は高々$\mathcal{O}(\epsilon)$ になる。このため、正のブースト重みを持つ因子を二つ以上持つ項は線形近似の範囲では無視できる。

４．熱力学第二法則の要請

一般座標変換に対して不変な任意の重力理論における、定常的なブラックホールのエントロピーは Wald エントロピーが知られている [2,3]。[1] では、これに揺らぎの補正項を追加したものを考えている。

$$S_{total} = \int_{\mathcal{H}_v} d^{d-2}x\sqrt{h}(1 + s^{HD}_w + s_{cor}) \tag{7}$$

ここで、s^{HD}_w は Wald エントロピーにおける高階微分項からの寄与である。平衡状態では補正項の s_{cor} はゼロになり、S_{total} は Wald エントロピーになる。線形オーダーまでの熱力学第二法則が成り立つことを仮定し、s_{cor} を読み取ることを考える。θ を次のように定義する。

$$\frac{\partial S_{total}}{\partial v} \equiv \int_{\mathcal{H}_v} d^{d-2}x\sqrt{h}\theta \tag{8}$$

$v \to \infty$ で定常状態へ収束する $(\theta \to 0)$ と仮定し、第二法則 $(\partial_v S_{total} \geq 0)$ が成り立つように、全ての v に対して、$\theta \geq 0$ であること、すなわち、$\partial_v\theta$ が単調減少関数であることを要請する。(7) の定義から $\partial_v\theta$ は以下のよう

---
[1] 日大理工・院 (前)・物理

に書ける。

$$\partial_v \theta = -R_{vv} + \partial_v[\frac{1}{\sqrt{h}}\partial_v\left(\sqrt{h}(s_w^{HD} + s_{cor})\right)] + \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{9}$$

E_{vv} を運動方程式の vv 成分、E_{vv}^{HD} を高階微分項からの寄与、T_{vv} をエネルギー運動量テンソルの vv 成分だとすると、$-E_{vv} = R_{vv} + E_{vv}^{HD} = T_{vv}$ と書ける。ヌルエネルギー条件を課すと、$T_{vv} \sim \mathcal{O}(\epsilon^2)$ であるということが議論でき、このことから、線形近似において T_{vv} は無視してもよい。$\partial_v\theta$ の主要部が $\mathcal{O}(\epsilon)$ の場合、符号が定まらないため、$\partial_v\theta \leq 0$ が成り立つには $\mathcal{O}(\epsilon)$ の項がキャンセルする必要がある。このことから次式が成立する必要がある。

$$E_{vv}^{HD} = -\partial_v[\frac{1}{\sqrt{h}}\partial_v\left(\sqrt{h}(s_w^{HD} + s_{cor})\right)] \tag{10}$$

[1] ではこの式が成り立つことを要請して、s_{cor} を提案している。

５．運動方程式の vv 成分 E_{vv}

一般座標変換 $x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \zeta^\mu$ の下で不変な重力理論では次式が恒等的に成り立つ。

$$D_\mu\left(\zeta^\mu L - 2E^{\mu\nu}\zeta_\nu - \Theta^\mu[\mathcal{L}_\zeta g]\right) = 0 \tag{11}$$

ここで、L はラグランジアン、$E^{\mu\nu}$ は運動方程式、$\Theta^\mu[\delta g]$ は運動方程式を導く際の全微分項であり、$\mathcal{L}_\zeta g$ は計量の Lie 微分である。次に恒等的に保存するベクトルは２階反対称テンソルの発散としてあらわすことができることを用いると、次式を満たす反対称テンソル $Q^{\mu\nu}$ が局所的に存在する。

$$\zeta^\mu L - 2E^{\mu\nu}\zeta_\nu - \Theta^\mu = -D_\nu Q^{\mu\nu} \tag{12}$$

(12) に対して、両辺に ζ_μ をかけて、縮約を取る。また、(12) は任意の ζ に対して成り立つので、ζ を $\xi = v\partial_v - r\partial_r$ に置き換える。その後で両辺をホライゾン上で評価すると以下の E_{vv} の式が得られる。

$$2vE_{vv}|_{r=0} = (-\Theta^r + D_\mu Q^{r\mu})|_{r=0} \tag{13}$$

６．エントロピーカレント

[1] では、(13) を用いて E_{vv} を (10) と同様な形へ変形し、エントロピーカレントを読み取っている。(13) の右辺の２項の v 依存性を調べ、v の次数ごとに係数を比較できる形に変形する。比較から得られた関係式を使い、E_{vv} を書き換え、エントロピーカレントを読み取る。

まず、Θ^r、$Q^{r\mu}$ の v 依存性を確認する。Θ^r は全微分項であったことから、ξ に対して線形になっている。また、$Q^{r\mu}$ は (12) から ξ に対して線形になっている。Θ^r、$Q^{r\mu}$ において $\xi = v\partial_v - r\partial_r$ が v 依存する唯一の要素なので、Θ^r、$Q^{r\mu}$ は v に対しても線形になっている。ブースト重み w を持つ成分を $\mathcal{A}_{(w)}$ と表すことにすると Θ^r、$Q^{r\mu}$ は以下のように表せる。

$$\begin{gathered}\Theta^r|_{r=0} = \Theta_{(1)} + v\Theta_{(2)} = \Theta_{(1)} + v(\partial_v\Theta_{(1)} + \partial_v^2\mathcal{M}_{(0)}),\\ Q^{rv}|_{r=0} = Q_{(0)} + vQ_{(1)}, \quad Q^{ri}|_{r=0} = J^i_{(1)} + v\partial_v\tilde{J}^i_{(1)}\end{gathered} \tag{14}$$

(14) を (13) へ代入し、両辺を v の次数ごとに係数比較して、以下の二つの式が得られる。

$$\begin{aligned}0 &= -\Theta_{(1)} + \frac{1}{\sqrt{h}}\partial_v\left(\sqrt{h}Q_{(0)}\right) + Q_{(1)} + \nabla_i\tilde{J}^i_{(1)}\\ 2E_{vv}|_{r=0} &= -\left(\partial_v\Theta_{(1)} + \partial_v^2\mathcal{M}_{(0)}\right)\\ &\quad + \partial_v Q_{(1)} + \partial_v\left(\nabla_i\tilde{J}^i_{(1)}\right)\end{aligned} \tag{15}$$

第一式を用いて、第二式の $\partial_v\left(-\Theta_{(1)} + Q_{(1)}\right)$ を消去すると、以下のようになる。

$$\begin{aligned}&2E_{vv}|_{r=0}\\ &= -\partial_v[\frac{1}{\sqrt{h}}\partial_v\left(\sqrt{h}(Q_{(0)} + \mathcal{M}_{(0)})\right) + \nabla_i(J^i_{(1)} - \tilde{J}^i_{(1)})]\end{aligned} \tag{16}$$

これと (10) を比較することでエントロピーカレントを読み取ることができる。

７．まとめ

[1] において提案された、熱力学第二法則に基づいた動的なブラックホールにおけるエントロピーカレントについてレビューした。

参考文献

[1] S.Bhattacharyya, P.Dhivakar, A.Dinda, N.Kundu, M.Patra and S. Roy, “An entropy current and the second law in higher derivative theories of gravity,” JHEP 09 (2021) 169.

[2] R. M. Wald, “Black hole entropy is the Noether charge,” Phys.Rev.D48 (1993) R3427.

[3] V. Iyer and R. M. Wald, “Some properties of Noether charge and a proposal for dynamical black hole entropy,” Phys. Rev. D 50 (1994) 846.

[4] S.Bhattacharyya, F.M.Haehl, N.Kundu, R.Loganayagam and M.Rangamani, “Towards a second law for Lovelock theories,” JHEP 03 (2017) 065.