O-7

汎関数くりこみ群を用いた量子重力理論の解析

Functional renormalization group analysis of quantum gravity

○上田悠河 [1]
Yuga Ueda[1]

Abstract : We review the fundamental aspects of the renormalization group equation that describes the scale dependence of effective field theories. The functional renormalization group flow for Einstein-Hilbert action with the cosmological constant indicates the existence of fixed points, which suggests an asymptotically free theory of quantum fields of gravity.

1.　はじめに

重力の場の量子論は摂動的にくりこみ不可能であるが，有効場の考え方に基づく理論のスケール依存性を非摂動論的に調べる汎関数くりこみ群の手法により，漸近安全な重力の場の量子論の存在が示唆されている[1]．理論に含まれる結合定数は，距離スケール（または運動量スケール）によって変わるという Wilson 流のくりこみ群の考えを基礎とし，有効平均作用と呼ばれるものを導入し，摂動論によらない汎関数くりこみ群という手法が，物性論から素粒子論にわたる広い分野に応用されている[2]．この手法では切断作用により赤外カットオフを導入し，紫外カットオフを外す極限においても有限に保たれる有効平均作用を定義する．この作用は，赤外カットオフを無限大にとると古典的な作用に帰着し，0 にとるとすべての量子ゆらぎを含む量子論的な作用に帰着する．有効平均作用のカットオフ依存性を表す方程式（汎関数くりこみ群方程式）のフローを Einstein-Hilbert 作用と宇宙定数を含む重力場に応用した場合にも固定点が存在することが分かっており[3]，重力場の量子論が存在している兆候を示す有力な手掛かりとなっている．この発表では，汎関数くりこみ群の手法とその重力場への応用についての基本的な結果をレビューする．

2.　有効平均作用

最初に，有効平均作用という量を定義する．ϕ を量子場，$\varphi = \langle 0|\phi|0\rangle$，J を外場，$S[\phi]$ を古典作用として，運動量スケール k に依存する生成汎関数 W_k を

$$e^{W_k[J]} = \int [D\phi] e^{-(S[\phi]+\Delta S_k[\phi])+\int J\phi} \quad (1)$$

で定義する．ここで，$\Delta S_k[\phi]$は切断作用と呼ばれ，

$$\Delta S_k[\phi] = \frac{1}{2}\int d^d q \phi(-q) R_k(q^2)\phi(q) \quad (2)$$

であり，$R_k(q^2)$ は $q^2 > k^2$ のときに十分早く 0 になる関数で，$\Delta S_k[\phi]$ は $q < k$ のモードの，分配関数への寄与を無くす役割をもつ．ここで，W_k のルジャンドル変換を，

$$\tilde{\Gamma}_k[\varphi] = -W_k[J] + \int J\varphi \quad (3)$$

で定義し，これを使って有効平均作用 Γ_k を

$$\Gamma_k[\varphi] = \tilde{\Gamma}_k[\varphi] - \Delta S_k[\varphi] \quad (4)$$

で定義する．Γ_kは，系の中の運動量が k より小さいゆらぎの効果を取り除いた後の，系の平均的な状態の情報を含んだ作用である．

3.　汎関数くりこみ群方程式

Γ_kは以下の方程式

$$\frac{d\Gamma_k[\varphi]}{dt} = \frac{1}{2} Tr\left(\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta\varphi\delta\varphi} + R_k\right)^{-1} \frac{dR_k}{dt} \quad (5)$$

に従う．ここで，$t = log\ k$ である，この方程式を汎関数くりこみ群方程式（FRGE）という．ここで，結合定数g_i，基底O_iを使ってΓ_kが

$$\Gamma_k = \sum_i g_i O_i \quad (6)$$

と書けるとき，

$$\frac{d\Gamma_k[\varphi]}{dt} = \sum_i \frac{dg_i}{dt} O_i \quad (7)$$

となるから，(5)式右辺がO_iで展開できるなら，(7)式と見比べることで，結合定数のスケールに対する変化がわかる．また，k→∞の紫外極限で各結合定数が一定の値（固定点）に収束するとき，考えている理論は紫外領域でも意味にある理論を定義できると考えられる．この解析は摂動論的に解析不可能な理論にも適用できる．

4.　重力理論への応用

ここまでの話を重力理論に応用する．背景場を $\bar{g}_{\mu\nu}$，量子ゆらぎを $h_{\mu\nu}$ として時空の計量$g_{\mu\nu}$ を

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (8)$$

とし，考える作用 S を

$$S(g) = Z_N \int d^d x \sqrt{g}\left(2\Lambda - g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}(g)\right) \quad (9)$$

とする．ここで，$Z_N = \frac{1}{16\pi G}, g = det(g_{\mu\nu})$ で，ΛとGは宇宙項と重力定数である．ここからゲージ固定をし

1：日大理工・院・物理

て，$S^{(2)}=\frac{\delta^2 S}{\delta\phi^2}$ を求めることで,1 ループまでの FRGE を立てると,

$$\frac{d\Gamma_k}{dt}=\frac{1}{2}Tr\left[(1-P)\frac{\dot{R}_k+\eta\bar{R}}{P_k-2\Lambda+\frac{d^2-3d+4}{d(d-1)}\underline{R}}\right]+\frac{1}{2}Tr\left[P\frac{\dot{R}_k+\eta R_k}{P_k-2\Lambda+\frac{d-4}{d}\bar{R}}\right]-Tr\left[\frac{\dot{R}_k}{P_k-\frac{1}{d}\bar{R}}\right] \quad (10)$$

となる.

ここで,

$$\eta=\frac{1}{Z_N}\frac{dZ_N}{dt}\ ,P=\frac{1}{d}\bar{g}_{\mu\nu}\bar{g}^{\alpha\beta}$$
$$R_k=P_k\left(-\underline{\nabla}^2\right)+\bar{\nabla}^{2} \quad (11)$$

であり,バーが付いている量は $\bar{g}_{\mu\nu}$ を用いて作られている.この切断関数の入れ方をⅠa 型切断という.（10）の左辺と右辺を計算し，$\bar{R}$で展開して各項を比 べてやると,

$$\frac{d\tilde{\Lambda}}{dt}=-2\tilde{\Lambda}+\tilde{G}\frac{A_1+2B_1\tilde{\Lambda}+\tilde{G}(A_1B_2-A_2B_1)}{2(1+B_2\tilde{G})} \quad (12)$$

$$\frac{d\tilde{G}}{dt}=(d-2)\tilde{G}+\frac{B_1\tilde{G}^2}{1+B_2\tilde{G}} \quad (13)$$

が成り立つ. ここで. $Z_N=\frac{k^{d-2}}{16\tilde{G}},\Lambda=k^2\tilde{\Lambda}$ であり. A_1,A_2,B_1,B_2 は d と$\tilde{\Lambda}$ に依存する量である. 4 次元 $(d=4)$ の場合，(12)(13)より，$\frac{d\tilde{\Lambda}}{dt}=\frac{d\tilde{G}}{dt}=0$ になる非自明な固定点

$$\tilde{G}=0.707321,\tilde{\Lambda}=0.193201$$

が存在する[1].これにより，アインシュタイン理論は対応する漸近的安全な量子場の理論を持つと考えられる.

5. まとめと展望

くりこみ群方程式で紫外極限での理論の安定性を調べられること，アインシュタインの重力理論が紫外極限において意味のある量子論を持つ可能性があることがわかった. 今後はこの内容を使い量子重力の効果が重要と考えられる初期宇宙での宇宙モデルや宇宙生成のシナリオについて検討を進めていければと考えている.

6. 参考文献

[1] 太田信義『漸近的安全性による重力の量子論へのアプローチ』, 丸善出版, 2021 年
[2] C.Wetterich, Phys.Lett.B 301(1993)90.
[3] M.Reuter,F.Saueressig, Phys.Rev.D 65 (2002)065016.