P-12

Fourier 変換を用いた波動方程式の解の導出

Derivation of the Solution to the Wave Equation using the Fourier Transform

○金子侑馬 [1]
*Yuma Kaneko[1]

Abstract: In this talk, we derive solutions to the initial value problem for the n-dimensional wave equation using the Fourier transform. After obtaining a general formula valid in any dimension, we carry out explicit computations in the case $n = 3$ to obtain a more concrete representation of the solution.

1. 定義と命題

本講演では n 次元波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = \Delta u(x,t), \quad \Delta u(x,t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial {x_j}^2}$$

の初期値問題の解を Fourier 変換を用いて導出を行う．
ここで初期条件は

$$u(x,0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$$

としている．

まず，いくつかの定義と命題を与える．
n 個の非負整数の組$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n)$ を多重指数と呼ぶ．ここで，多重指数αに対し，x^α, $(\frac{\partial}{\partial x})^\alpha f$ をそれぞれ

$$x^\alpha = {x_1}^{\alpha_1} {x_2}^{\alpha_2} \cdots {x_n}^{\alpha_n}, \quad \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial {x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial {x_n}^{\alpha_n}}$$

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$$

と定義する．次に，急減少関数の空間 $S(\mathbb{R}^n)$ を以下で定義する．

$$S(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \;\middle|\; \begin{array}{l} f \text{ は } C^\infty \text{ 級で，任意の多重指数} \\ \alpha, \beta \text{ に対し，} x^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\beta f \text{ は有界} \end{array} \right\}$$

さらに，$f \in S(\mathbb{R}^n)$ における Fourier 変換を

$$\widehat{f}(\xi) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle \xi, x\rangle} f(x)\, dx \quad (\xi \in \mathbb{R}^n)$$

$$\langle \xi, x \rangle = \xi_1 x_1 + \cdots + \xi_n x_n$$

と定義する．

命題 1. $f \in S(\mathbb{R}^n)$ とする．このとき任意の多重指数 α に対し次が成立する．

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha f\right)^{\widehat{}}(\xi) = (i\xi)^\alpha \widehat{f}(\xi)$$

命題 2. $f \in S(\mathbb{R}^n)$ とする．このとき次が成立する．

(1) $\widehat{f}(\xi) \in S(\mathbb{R}^n)$

(2) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, dx < \infty$

(3) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2\, dx < \infty$

命題 3. $f \in S(\mathbb{R}^n)$ とする．このとき次が成立する．

(1) 反転公式 $\displaystyle f(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle \xi, x\rangle} \widehat{f}(\xi)\, d\xi$

(2)Plancherel の定理 $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi)|^2\, d\xi$

2. n 次元波動方程式の解

まずは，n 次元波動方程式の解を導出する．u を波動方程式の解とし，$f, g \in S(\mathbb{R}^n)$ とする．

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = \Delta u(x,t)$$

に対し，x について Fourier 変換

$$\widehat{u}(\xi, t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle \xi, x\rangle} u(x,t)\, dx$$

を形式的に行うと

$$\frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial t^2}(\xi, t) = -|\xi|^2 \widehat{u}(\xi, t)$$

となる．このとき，初期値に対しても同様の操作を行うと $\widehat{u}(\xi, 0) = \widehat{f}(\xi)$, $\widehat{\frac{\partial u}{\partial t}}(\xi, 0) = \widehat{g}(\xi)$ が得られる．
ここで各 $\xi \in \mathbb{R}^n$ を固定すると上式は t についての常微分方程式となり，解は

$$\widehat{u}(\xi, t) = \widehat{f}(\xi) \cos t|\xi| + \widehat{g}(\xi) \frac{\sin t|\xi|}{|\xi|}$$

となる．

1: 日大理工・院 (前)・数学

$\widehat{u}$ に対し，反転公式を適用すれば，次の公式を得る．

定理 4.　n **次元波動方程式の解の公式**
$f, g \in S(\mathbb{R}^n)$ とする．このとき，n 次元波動方程式の初期値問題の解 $u(x,t)$ は次のようになる．

$$u(x,t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\widehat{f}(\xi)\cos t|\xi| + \widehat{g}(\xi)\frac{\sin t|\xi|}{|\xi|}\right) e^{i\langle\xi,x\rangle}\, d\xi$$

3. 定理 4. の証明の概略

上式の $u(x,t)$ が波動方程式初期値問題の解であることを示す．$f, g \in S(\mathbb{R}^n)$ とし，解の公式の被積分関数を $A(\xi,t)$ とおく．このとき，$A(\xi,t)$ は各点 t を固定するごとに ξ について可積分である．また，$A(\xi,t)$ は各点 ξ を固定するごとに t について C^2 級である．さらに，以下のような ξ のみに依存する支配関数 $F(\xi)$ が存在する．

$$\left|\frac{\partial A(\xi,t)}{\partial t}\right| \leqq |\xi||\widehat{f}(\xi)| + |\widehat{g}(\xi)| = F(\xi)$$

ここで支配関数 $F(\xi)$ は ξ に関して可積分である．以上のことから，t についての微分と ξ についての積分の順序交換が可能であることがわかるので，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left(-\widehat{f}(\xi)\cos t|\xi| - \widehat{g}(\xi)\frac{\sin t|\xi|}{|\xi|}\right) |\xi|^2 e^{i\langle\xi,x\rangle}\, d\xi$$

が得られる．同様にして，x についての微分と ξ についての積分の順序交換が可能であることがわかるので，

$$\Delta u(x,t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\widehat{f}(\xi)\cos t|\xi| + \widehat{g}(\xi)\frac{\sin t|\xi|}{|\xi|}\right) (-|\xi|^2) e^{i\langle\xi,x\rangle}\, d\xi$$

が得られる．よって $u(x,t)$ は波動方程式の解である．また，u に対し, $t=0$ とすると $u(x,0)=f(x)$ となり，$\frac{\partial u}{\partial 2}$ に対し, $t=0$ とすると $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=g(x)$ となることがわかる．したがって，導出した解の公式は，n 次元波動方程式の初期値問題を満たすことがわかる．

ここで導出した解の公式は，与えられた関数に対して Fourier 変換が現れる．そこで，$n=3$ の場合に，Fourier 変換が現れない具体的な表式を紹介する。

4. 3 次元波動方程式の解の公式

$\mathbb{R}^3$ での極座標は，

$$x_1 = r\sin\theta\cos\varphi,\ x_2 = r\sin\theta\sin\varphi,\ x_3 = r\cos\theta \quad (0 \leqq \theta \leqq \pi,\ 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi)$$

となるから，球面 $|x| = r$ 上の面積要素を $d\omega$ で表すと，

$$d\omega = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

となる．

補題 5. $x, \xi \in \mathbb{R}^3$, $r \geqq 0$ に対し，

$$\int_{|x|=r} e^{i\langle\xi,x\rangle}\, d\omega = 4\pi r \frac{\sin r|\xi|}{|\xi|}$$

定理 6.　**3 次元波動方程式の解の公式**
$f, g \in S(\mathbb{R}^3)$ とする．このとき，3 次元波動方程式の初期値問題の解は次のように表すことができる．

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi t}\int_{|y|=t} f(x+y)\, d\omega_y\right) + \frac{1}{4\pi t}\int_{|y|=t} g(x+y)\, d\omega_y$$

5. 定理 6. の証明の概略

3 次元波動方程式

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}^3} \left(\widehat{f}(\xi)\frac{\partial}{\partial t}\frac{\sin t|\xi|}{|\xi|} + \widehat{g}(\xi)\frac{\sin t|\xi|}{|\xi|}\right) e^{i\langle\xi,x\rangle}\, d\xi$$

に対し，本稿では，$\widehat{g}(\xi)$ を含む項の計算のみ詳述する．補題 5. より

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}^3} \widehat{g}(\xi)\frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|} e^{i\langle\xi,x\rangle}\, d\xi \\
&= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}^3} \widehat{g}(\xi)\left(\frac{1}{4\pi t}\int_{|y|=t} e^{i\langle\xi,y\rangle}\, d\omega_y\right) e^{i\langle\xi,x\rangle}\, d\xi \\
&= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{4\pi t}\int_{|y|=t}\int_{\mathbb{R}^3} \widehat{g}(\xi) e^{i\langle\xi,x+y\rangle}\, d\xi\, d\omega_y \\
&= \frac{1}{4\pi t}\int_{|y|=t} g(x+y)\, d\omega_y
\end{aligned}$$

$\widehat{f}(\xi)$ を含む項も同様に計算すれば，3 次元波動方程式の一般解

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi t}\int_{|y|=t} f(x+y)\, d\omega_y\right) + \frac{1}{4\pi t}\int_{|y|=t} g(x+y)\, d\omega_y$$

が得られる．

6. 参考文献

[1] 倉田和浩著，フーリエ解析の基礎と応用，数理工学社，(2020)

[2] 高橋陽一郎著，実関数とフーリエ変換，岩波書店，(2016)

[3] 黒田成俊著，関数解析，共立出版，(1980)