P-13

微分方程式系における平衡点の一様漸近安定性
Uniform Asymptotic Stability of Equilibrium Points in Differential Systems

○根本智史 [1]
*Satoshi Nemoto[1]

Abstract: 微分方程式系の平衡点における安定性について考察する．特に，Jacobi 行列の固有値の実部がすべて負である場合に，零解が一様漸近安定となることを示す．この結果は，非線形系の局所的な挙動が線形化によって判定できることを意味し，安定性解析において基本的かつ重要な理論的基盤を与える．

1．はじめに
ここでは，１階微分方程式

$$\vec{x}' = \vec{f}(\vec{x})$$

を考える．ここで，

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ f_2(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_n(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

である．独立変数 t が左辺の微分以外に含まれないような方程式系を自励系という．
ある平衡点 $\vec{x}^*$ が存在するとする．
このとき，新しい変数 $\vec{y} = \vec{x} - \vec{x}^*$ を導入すると，

$$\vec{y}' = \vec{x}' = f(\vec{x}) = f(\vec{y} + \vec{x}^*)$$

となり，$\vec{y} = 0$ が平衡点となる．したがって，原点近傍における漸近挙動を調べれば，もとの系における平衡点 $\vec{x}^*$ の漸近挙動が分かる．さらに，Taylor 展開により

$$f(\vec{y} + \vec{x}^*) = f(\vec{x}^*) + Df(\vec{x}^*)\, y + o(\|\vec{y}\|)$$

となり，$f(\vec{x}^*) = 0$ より

$$\vec{y}' = A\vec{y} + o(\|\vec{y}\|), \qquad A := Df(\vec{x}^*)$$

したがって，原点まわりの線形系の安定性によって局所漸近安定性を判定できる．

2．定義と補題
定義 1　$\vec{y}(t)$ が微分方程式系 $\vec{x}' = \vec{f}(t, \vec{x})$ の解として安定であるとは，
$\forall \varepsilon > 0$ 対して $\exists \delta > 0$ を適当に選べば，任意の解 $\vec{x}(t)$ について

$$||\vec{x}(0) - \vec{y}(0)|| < \delta \quad \Rightarrow \quad ||\vec{x}(t) - \vec{y}(t)|| < \varepsilon \quad (\forall t \geq 0)$$

となることである．
また，$\vec{y}(t)$ が漸近安定であるとは，安定であって $\exists \delta > 0$ を適当に選べば,

$$||\vec{x}(0) - \vec{y}(0)|| < \delta \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \to \infty} ||\vec{x}(t) - \vec{y}(t)|| = 0$$

となることである．
更に，$\vec{y}(t)$ が一様漸近安定であるとは，上の収束が初期値について一様なこと．すなわち，適当な $\delta > 0$ について，$||x(0) - y(0)|| < \delta$ なる初期値を持つ解 $\vec{x}(t)$ はすべて，$\forall \varepsilon$ に対し $\vec{x}$ によらない $\exists t_\varepsilon$ を選んで,

$$t \geq t_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad ||\vec{x}(t) - \vec{y}(t)|| < \varepsilon$$

となることである．

定義 2　ベクトル場 $\vec{v}(x)$ に対し，原点のある近傍で定義された C^1 級の非負値連続関数 $L(\vec{x})$ が Lyapunov 関数であるとは，$L(\vec{x})$ は$\vec{x} = 0$ で狭義の極小値を持ち，かつ

$$\vec{v}(\vec{x}) \cdot \nabla L(\vec{x}) \leq 0$$

が常に成り立つことをいう．また，$L(x)$ が原点以外で

$$\vec{v}(x) \cdot \nabla L(\vec{x}) < 0$$

を満たしているときは，強い意味の Lyapunov 関数と呼ぶ.

補題 3　$\vec{x}$ のある近傍 D で $\vec{f}(\vec{x})$ に Lyapunov 関数が存在するならば，微分方程式系 $\vec{x}' = \vec{f}(\vec{x})$ の零解は安定である．また強い意味の Lyapunov 関数が存在するならば，一様漸近安定となる．

3．主定理
定理 4　微分方程式系 $\vec{x}' = \vec{f}(\vec{x})$ において $\vec{f}$ は C^1 級で $\vec{f}(0) = 0$ を満たし，かつ $\vec{f}$ の $\vec{x} = 0$ における微分（Jacobi 行列，Taylor 展開の 1 次の項の係数よりなる行列）は固有値の実部がすべて負であるとする．このとき、解 $\vec{x} = 0$ は一様漸近安定である．

4．Jordan 標準形

$$\vec{x}' = \vec{f}(\vec{x}), \qquad \vec{f}(\vec{x}) = A\vec{x} + o(|\vec{x}|)$$

1: 日大理工・院 (前)・数学　 2: 日大理工・教員・数学

任意の正則行列 P に対して，$\vec{x}=P\vec{y}$ と変換する．これを微分方程式に代入すると，

$$P\vec{y}'=\vec{f}(P\vec{y})=AP\vec{y}+o(\|\vec{y}\|)$$

$$\vec{y}'=P^{-1}AP\vec{y}+P^{-1}o(\|\vec{y}\|)$$

Jordan 標準形を与える実線形変換を行った後の新座標をもとと同じ記号 $\vec{x}$ で表すことにする．
実行列 A は Jordan 標準形を持つが，一般に実固有値 λ がサイズ k の Jordan ブロック

$$\begin{pmatrix}\lambda & 1 & & 0\\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ 0 & & & \lambda\end{pmatrix}$$

を持てば，この部分は，

$$(A-\lambda)\vec{u}_k=\vec{u}_{k-1},(A-\lambda)\vec{u}_{k-1}=\vec{u}_{k-2},\cdots,$$
$$(A-\lambda)\vec{u}_2=\vec{u}_1,(A-\lambda)\vec{u}_1=0$$

なる $\vec{u}_k,\cdots,\vec{u}_1$ を基底として書ける．ここである $\varepsilon>0$ を用いて，

$$(A-\lambda)\vec{u}_k=\varepsilon\vec{u}_{k-1},(A-\lambda)\vec{u}_{k-1}=\varepsilon\vec{u}_{k-2},\cdots,$$
$$(A-\lambda)\vec{u}_2=\varepsilon\vec{u}_1,(A-\lambda)\vec{u}_1=0$$

を満たすように基底を取り直せる．このような基底に対しては，Jordan ブロックは

$$\begin{pmatrix}\lambda & \varepsilon & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & & \ddots & \ddots & \varepsilon\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda\end{pmatrix}$$

となる．また，λ が複素重複固有値の場合は，$\lambda=a+ib$ とし，対応する複素固有ベクトルを $\vec{\omega}=\vec{u}+i\vec{v}$ と置いて $(A-\lambda)\vec{\omega}_k=\varepsilon\vec{\omega}_{k-1}$ の実部と虚部を取れば，

$$A\vec{u}_k=a\vec{u}_k-b\vec{v}_k+\varepsilon\vec{v}_{k-1},A\vec{v}_k=b\vec{u}_k+a\vec{v}_k+\varepsilon\vec{v}_{k-1}$$

この部分に対する実部の基底を $\vec{u}_{k-1},\vec{v}_{k-1},\vec{u}_k,\vec{v}_k$ の順に並べれば，対応する Jordan 標準形の部分は，

$$\begin{pmatrix}a & b & \varepsilon & 0\\ -b & a & 0 & \varepsilon\\ 0 & 0 & a & b\\ 0 & 0 & -b & a\end{pmatrix}(k=1,2)$$

となる．この Jordan ブロックは全体として上のパターンが対角線に沿って繰り返された形となる．

5．定理の証明

補題 3 より，強い意味のリアプノフ関数を作ればよい．
実線形変換を行った後の新座標での Lyapunov 関数を

$$L(\vec{x})=\frac{1}{2}\|\vec{x}\|^2$$

と取れば，$\nabla L(\vec{x})=\vec{x}$ なので，

$$\vec{f}(\vec{x})\cdot\nabla L(\vec{x})=(P^{-1}AP\vec{x})\cdot\vec{x}+o(\|\vec{x}\|^2)$$

となる．

$$\vec{f}(\vec{x})\cdot\nabla L(\vec{x})$$

$$=\sum_{\substack{J:\,\text{実固有値}\\ \text{のブロック}}}\Big\{\sum_{j=1}^{m_J-1}(\lambda_J x_{J,j}+\varepsilon x_{J,j+1})x_{J,j}+\lambda_J x_{J,m_J}^2\Big\}$$

$$+\sum_{\substack{J:\,\text{複素固有値}\\ \text{のブロック}}}\Big\{\sum_{j=1}^{m_J-1}(a_J x_{J,2j-1}+b_J x_{J,2j}+\varepsilon x_{J,2j+1})x_{J,2j-1}$$
$$+(-b_J x_{J,2j-1}+a_J x_{J,2j}+\varepsilon x_{J.2j+2})x_{J,2j}$$
$$+(a_J x_{J,2m_J-1}+b_J x_{J,2m_J})x_{J,2m_J-1}$$
$$+(-b_J x_{J,2m_J-1}+a_J x_{J,2m_J})x_{J,2m_J}\Big\}+o(\|\vec{x}\|^2)$$

$$=\sum_{\substack{J:\,\text{実固有値}\\ \text{のブロック}}}\Big\{\sum_{j=1}^{m_J-1}(\lambda_J x_{J,j}^2+\varepsilon x_{J,j}x_{J,j+1})+\lambda_J x_{J,m_J}^2\Big\}$$

$$+\sum_{\substack{J:\,\text{複素固有値}\\ \text{のブロック}}}\Big\{\sum_{j=1}^{m_J-1}\{a_J(x_{J,2j-1}^2+x_{J,2j}^2)$$
$$+\varepsilon(x_{J,2j-1}x_{J,2j+1}+x_{J,2j}x_{J,2j+2})\}$$
$$+a_J(x_{J,2m_J-1}^2+x_{J,2J}^2)\Big\}+o(\|\vec{x}\|^2)$$

となる．したがって，ある $\delta>0$ について，すべての固有値の実部が $\leq-\delta$ と評価されるならば，

$$|x_{J,j-1}x_{J,j}|\leq\frac{1}{2}(x_{J,j-1}^2+x_{J,j}^2),$$

$$\|\vec{x}\|^2=\sum_{\substack{J:\,\text{実固有値}\\ \text{のブロック}}}\sum_{j=1}^{m_J}x_{J,j}^2+\sum_{\substack{J:\,\text{複素固有値}\\ \text{のブロック}}}\sum_{j=1}^{m_J}x_{J,2j}^2$$

より，十分小さい $\|\vec{x}\|$ に対して，

$$\vec{f}(\vec{x})\cdot\nabla L(\vec{x})\leq-\delta\|\vec{x}\|^2+\frac{\varepsilon}{2}\|\vec{x}\|^2+\frac{\varepsilon}{2}\|\vec{x}\|^2=-(\delta-\varepsilon)\|\vec{x}\|^2$$

となる．よって，$\varepsilon<\delta$ と取れば，L は強い意味の Lyapunov 関数の仮定を満たす．

6．参考文献

[1] 金子晃,” 微分方程式講義”, サイエンス社