

## Fourier 反転公式が成立する条件について On the conditions for the Fourier inversion theorem

○松本魁斗<sup>1</sup>

\*Kaito Matsumoto<sup>1</sup>

Abstract: Tanigawa argues that the Fourier inversion theorem holds for any smooth and absolutely integrable function. However, there are some oversights in his proof. In this paper, we first review his proof and highlight the issues. Next, we compare his statement with other versions of the Fourier inversion theorem from the literature. Finally, we present a necessary condition for a counterexample to the Fourier inversion theorem given by Tanigawa.

### 1. はじめに

なめらかな関数  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  が絶対可積分であるとは

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$$

を満たすことである. 滑らかで絶対可積分な関数  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  に対し,  $f$  の Fourier 変換  $F$  を

$$F(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-i\omega y} dy, \quad \omega \in \mathbb{R} \quad (1)$$

で定義する. ここで,  $i = \sqrt{-1}$  は虚数単位である.

谷川 [1, p.64, 定理 3.1.1] によると, 次が成り立つと主張している.

**定理 1** (Fourier 反転公式 [1, p.63, 定理 3.1.1]).  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  は滑らかで絶対可積分であるとする.  $F$  を式 (1) で定めた  $f$  の Fourier 変換とすると, すべての  $x \in \mathbb{R}$  に対して

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x} d\omega \quad (2)$$

が成り立つ.

本稿は, 定理 1 が正しいかどうかを他の文献と比較, 調査しまとめたものである.

### 2. 谷川による定理 1 の証明とその問題点

谷川は [1, p.62-63] において, 定理 1 を複素 Fourier 級数と Riemann 和に関する等式を用いて示している. この議論に対する問題点を述べる.

谷川による Fourier 反転公式の導出を説明するために必要な複素 Fourier 級数と Riemann 和に関する等式を紹介する.

**定理 2** (複素フーリエ級数). 周期  $2L$  の周期関数  $f_L(x)$  が滑らかならば, 任意の  $x \in (-L, L)$  に対して,

$$f_L(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N c_n e^{\frac{in\pi x}{L}}, \quad (3)$$

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f_L(x) e^{-\frac{in\pi x}{L}} dx \quad (n \in \mathbb{Z}) \quad (4)$$

と展開できる.

**定理 3** (リーマン和に関する等式).  $n \in \mathbb{N}$  に対し  $\omega_n = \frac{n\pi}{L}$ ,  $\Delta\omega = \omega_n - \omega_{n-1} = \frac{\pi}{L}$  とおくと, 連続な関数  $h(\omega)$  に対して,

$$\lim_{L \rightarrow +\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(\omega_n) \Delta\omega = \int_{-\infty}^{\infty} h(\omega) d\omega \quad (5)$$

が成り立つ.

谷川では式 (3) より

$$f_L(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{L}} \quad (6)$$

としている. しかし式 (6) の右辺は

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{L}} = \lim_{N, \tilde{N} \rightarrow \infty} \sum_{n=-\tilde{N}}^N c_n e^{\frac{in\pi x}{L}} \quad (7)$$

であり, 式 (3) とは異なる.

谷川では式 (4) を式 (6) に代入して

$$f_L(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f_L(y) e^{-\frac{in\pi y}{L}} dy \right\} e^{\frac{in\pi x}{L}} \quad (8)$$

を得た. そして,  $\omega_n = \frac{n\pi}{L}$ ,  $\Delta\omega = \frac{\pi}{L}$  とおき

$$\int_{-L}^L f_L(y) e^{-i\omega_n y} dy =: h(\omega_n) \quad (9)$$

とおくと

$$f_L(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(\omega_n) e^{i\omega_n x} \Delta\omega \quad (10)$$

1: 日大理工・院(前)・数学

が成り立つ。  $L \rightarrow +\infty$  とすると、すべての  $x \in \mathbb{R}$  に対して、  $f_L(x) \rightarrow f(x)$  であることと定理3から

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-i\omega y} dy \right\} e^{i\omega x} d\omega \quad (11)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x} d\omega \quad (12)$$

が成り立つと主張している。しかしながら式(9)の左辺が  $L$  に依存しているの、式(9)の右辺である  $h$  も  $L$  に依存している。定理3では  $h$  は  $L$  に依存しないので、定理3から式(12)を導くことができない。すなわち、この議論では定理3を用いることができない。

大石 [3, p.73, 式(3.4)] による Fourier 反転公式では、定理1が成り立つと主張し、上記と同じ議論がなされている。ただし、この議論は直感的なものであり数学的に厳密ではないと言及している。

### 3. 他の文献による Fourier 反転公式とその比較

定理1が成り立つか否かについて、ほかの文献を調査した。

#### 3.1 新井による Fourier 反転公式

新井 [2] によると Fourier 反転公式は以下のように述べられている。

**定理4** (Fourier 反転公式 [2, p.218, 定理 9.7]).  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  を滑らかで絶対可積分であるとする。  $F$  が  $\mathbb{R}$  上絶対可積分であれば、すべての  $x \in \mathbb{R}$  に対して

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x} dx \quad (13)$$

が成り立つ。

定理4と定理1の違いは、  $f$  の Fourier 変換において  $F$  に絶対可積分の仮定を課すか否かである。このことから次の問いが得られる。

**問題5.** 滑らかで絶対可積分な  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  の Fourier 変換は絶対可積分であるか？

現状この問題は正しくないと考えているが、反例はわかっていない。ただし、問題5が正しくないとしても定理1が正しくないと主張するわけではない事に注意する。

定理4の結果より急減少関数に対して以下の結果が得られる。  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  が急減少関数とは、すべての非負整数  $k, l$  に対して、

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k |f^{(l)}(x)| < \infty \quad (14)$$

を満たすことである。

スタイン-シャカルチ [5] によると Fourier 反転公式は以下のように述べられている。

**定理6** (Fourier 反転公式 [5, p.141, 定理 1.9]).  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  は急減少関数であるとする。すべての  $x \in \mathbb{R}$  に対して

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x} d\omega \quad (15)$$

が成り立つ。

定理6を示すためには、急減少関数の Fourier 変換は急減少関数が成り立つことを使う。急減少関数ならば絶対可積分であるので、定理4を使うことができる。

#### 3.2 長澤による Fourier 反転公式

長澤 [4] によると Fourier 反転公式は以下のように述べられている。

**定理7** (Fourier 反転公式 [4, p.112, 定理 3.10]).  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  は滑らかで絶対可積分であるとする。すべての  $x \in \mathbb{R}$  に対して

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M F(\omega)e^{i\omega x} d\omega \quad (16)$$

が成り立つ。

[4, p.112, 定理 3.10] はこの証明ならびにこの結果に関する参考文献は記載がない。式(2)では、式(16)と違い

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{M, \tilde{M} \rightarrow \infty} \int_{-\tilde{M}}^M F(\omega)e^{i\omega x} d\omega \quad (17)$$

となることに注意する。従って、定理7が正しいとすると定理1が正しくないことを示すには、広義積分の極限の取り方を議論しなければならない。

### 4. 参考文献

- [1] 谷川 明夫, “フーリエ解析入門,” 第2版, 共立出版, 2007.
- [2] 新井 仁之, “フーリエ解析学,” 朝倉書店, 2003.
- [3] 大石 進一, “フーリエ解析,” 岩波書店, 1989.
- [4] 長澤 壯之, “ガイダンス応用解析: ベクトル解析・複素関数・フーリエ解析・微分方程式,” サイエンス社, 2022.
- [5] エリアス M. スタイン, ラミ シャカルチ / 新井 仁之, 杉本 充, 高木 啓行, 千原 浩之 訳, “フーリエ解析入門,” 日本評論社, 2007.