

空間不均一な非線形拡散を持つ Fokker-Planck 方程式のアプリオリ評価 A priori estimate for the nonlinear Fokker-Planck equation with Inhomogeneous Nonlinear Diffusion

○荒木康太
*Kouta Araki

Abstract: We consider the nonlinear Fokker-Planck model with inhomogeneous spatial diffusion subjected to the Neumann boundary condition. The equation is based on the continuity equation and we can derive the energy law in terms of some free energy concerning the Fokker-Planck equation. The study of the long-time behavior of the free energy for the Fokker-Planck equation with inhomogeneous spatial diffusion, we assume the solution is positivity and boundedness. In this talk, we show a sufficient condition for this assumption to be valid.

1. 非線形 Fokker-Planck 方程式

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ は有界な凸領域とする. $\alpha > 1$, $d \in C^2(\bar{\Omega})$ は $\min_{x \in \bar{\Omega}} d(x) > 0$ をみたし, $\phi \in C^2(\bar{\Omega})$ とする. 以下の非線形 Fokker-Planck 方程式のノイマン問題を考える.

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} - \operatorname{div}(\rho \nabla(\alpha d(x) \rho^{\alpha-1} + \phi(x))) = 0, x \in \Omega, t > 0, \\ \rho(x, 0) = \rho_0(x), x \in \Omega, \\ \rho \nabla(\alpha d(x) \rho^{\alpha-1} + \phi(x)) \cdot \nu = 0, x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (\text{NFP})$$

ここで, ν は $\partial\Omega$ 上の外向き単位法線ベクトルとする. ρ_0 は与えられた C^2 級の正值関数で $\|\rho_0\|_{L^1(\Omega)} = 1$ をみたすものとする. $\mu := \alpha d(x) \rho^{\alpha-1} + \phi(x)$ とおく. 次に自由エネルギーを

$$\mathcal{F}[\rho] := \int_{\Omega} (d(x) \rho^{\alpha} + \rho \phi(x)) dx$$

と定める. (NFP), 境界条件から以下が成り立つ.

命題 1 ρ は (NFP) の $\bar{\Omega}$ 上正值で有界な時間大域的古典解とする. このとき, 自由エネルギー $\mathcal{F}[\rho]$ に対して以下が成り立つ.

$$\frac{d}{dt} \mathcal{F}[\rho] = - \int_{\Omega} |\nabla \mu|^2 \rho dx =: -\mathcal{D}[\rho] \quad (1)$$

(1) をエネルギー散逸則といい, $\mathcal{D}[\rho]$ を自由エネルギー $\mathcal{F}[\rho]$ の散逸関数という. 2024 年度学術講演会で自由エネルギーの散逸関数の長時間挙動について以下を報告した.

定理 2 (2024 年度修論) $n = 1, 2, 3$ と仮定する. ある正の定数 $\lambda > 0$ が存在して, $\nabla^2 \phi \geq \lambda I$ が成り立つとする. ここで I は単位行列である. ある $x \in \Omega$, $t > 0$ によらない正の定数 $C_1, C_2 > 0$ が存在して

$$C_1 \leq \rho \leq C_2 \quad (2)$$

を満たす (NFP) の時間大域的古典解 ρ の存在を仮定する. このとき, ある正の定数 $C_3 > 0$ と $C_4 > 0$ が存在して

$$d(x) \geq C_3, \quad \int_{\Omega} |\nabla \mu(x, 0)|^2 \rho_0(x) dx \leq C_4 \quad (3)$$

が成り立つならば, ある正の定数 $C_5 > 0$ が存在して,

$$\int_{\Omega} |\nabla \mu|^2 \rho dx \leq C_5 e^{-\lambda t}, \quad t > 0 \quad (4)$$

が成り立つ.

そこで, (2) が成り立つための ρ_0, d, ϕ, α に対するの十分条件を考察する. (NFP) は $\operatorname{div}(\alpha(\alpha-1)d(x)\rho^{\alpha-1}\nabla\rho)$ の項が存在するため, 退化型拡散方程式となる. 熱方程式とは異なり, $\rho_0 \geq 0$ であっても, (NFP) の解の正值性は一般には成り立たないことが知られている. 我々は μ に関する方程式を考察することで次の結果を得た.

定理 3 任意の $x \in \bar{\Omega}$ に対して

$$\alpha d(x) \rho_0^{\alpha-1}(x) > \max_{y \in \bar{\Omega}} \phi(y) - \phi(x) \quad (5)$$

が成り立つとする. このとき, (NFP) の時間大域的古典解 ρ に対して, (2) が成り立ち, C_1, C_2 は具体的に以下で表される.

$$C_1 = \left(\frac{\min_{y \in \bar{\Omega}} \mu(y, 0) - \max_{y \in \bar{\Omega}} \phi(y)}{\alpha \max_{y \in \bar{\Omega}} d(y)} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}},$$

$$C_2 = \left(\frac{\max_{y \in \bar{\Omega}} \mu(y, 0) - \min_{y \in \bar{\Omega}} \phi(y)}{\alpha \min_{y \in \bar{\Omega}} d(y)} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}}.$$

とくに, C_1, C_2 は $x \in \Omega, t > 0$ には依存しない.

注意 4 定理 2 では拡散係数 $d(x)$ を大きくとることを考えている. C_1, C_2 に拡散係数 $d(x)$ が依存している. そのため, $d(x)$ を大きくとるときに C_1, C_2 が正值で有界となる条件を考える必要がある. そこで, ある $C_R > 0$ が存在して,

$$\frac{\min_{y \in \bar{\Omega}} d(y)}{\max_{y \in \bar{\Omega}} d(y)} > C_R$$

を仮定すれば,

$$C_1^{\alpha-1} \geq \left(C_R \min_{y \in \bar{\Omega}} \rho_0(y) - \frac{\max_{y \in \bar{\Omega}} \phi(y) - \min_{y \in \bar{\Omega}} \phi(y)}{\alpha \max_{y \in \bar{\Omega}} d(y)} \right)$$

が成り立つ。 $d(x)$ を十分大きくしたときに、 $C_1 > 0$ となる。 同様に C_2 の d によらない有界性も得られる。

すなわち、(NFP) の時間大域的古典解の存在が示せれば(5) の仮定のもとで定理2を適応できる。

2. 証明の概略

定理3の証明の方針は(NFP)に対する最大値原理の証明をなぞることである。そこで、ある $T > 0$ が存在して、 $\Omega \times (0, T)$ で ρ が最小値をとると仮定し、矛盾を示す。(NFP) を非発散形式で表すと

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} - \alpha(\alpha - 1)d(x)\rho^{\alpha-1}\Delta\rho - G(\nabla\rho) \\ - \rho\Delta\phi(x) - \alpha\rho^\alpha\Delta d(x) = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

となる。ここで、 $G(\nabla\rho)$ は $\nabla\rho$ が現れる項である。(NFP) を非発散型で記述した(6)には ρ の0階微分の項が現れる。そのため、 ρ と $\Delta\phi(x)$ 、 $\Delta d(x)$ の関係を考察する必要がある。この考察を避けるために $\mu = \alpha d(x)\rho^{\alpha-1} + \phi(x)$ についての方程式を立てる。

$$\begin{aligned} \mu_t = \alpha(\alpha - 1)d(x)\rho^{\alpha-1}\Delta\mu + |\nabla\mu|^2 \\ - \alpha\rho^{\alpha-1}(\nabla d(x) \cdot \nabla\mu) - (\nabla\phi(x) \cdot \nabla\mu). \end{aligned} \quad (7)$$

(7)では μ の0階微分項が現れないことから、 ρ を与えられた正值関数として μ についての最大値原理の証明をなぞることによって次が成り立つ。

補題5 (5)が成り立つと仮定する。 ρ を(NFP)の時間大域的古典解とする。このとき、任意の $T > 0$ に対して

$$\min_{y \in \bar{\Omega}} \mu(y, 0) \leq \mu(x, t) \leq \max_{y \in \bar{\Omega}} \mu(y, 0), \quad (x, t) \in \bar{\Omega} \times [0, T] \quad (8)$$

が成り立つ。

(8)を ρ について解くことによって(2)が得られる。(8)の下からの評価について証明の方針を述べる。 $|\nabla\mu|^2 \geq 0$ より、(7)の方程式は

$$\begin{aligned} \mu_t \geq \alpha(\alpha - 1)d(x)\rho^{\alpha-1}\Delta\mu \\ - \alpha\rho^{\alpha-1}(\nabla d(x) \cdot \nabla\mu) - (\nabla\phi(x) \cdot \nabla\mu) \end{aligned} \quad (9)$$

となる。すなわち、 μ はある線形放物型方程式の優解となる。したがって、 $\rho > 0$ である限り、[1]の結果から、任意の $T > 0$ に対して

$$\min_{(y,t) \in \bar{\Omega} \times [0,T]} \mu(y, t) = \min_{(y,t) \in \bar{\Omega} \times \{t=0\} \cup \partial\Omega \times (0,T)} \mu(y, t)$$

が成り立つ。 $\partial\Omega$ は十分なめらかであることから、[2]の理論が使えて、以下が成り立つ。

補題6 (Hopfの補題) ν は Ω 上の外向き単位法線ベクトルとする。 μ が $(x_0, t_0) \in \partial\Omega \times [0, T]$ で最小値をとると仮定する。この時、

$$\frac{\partial \mu}{\partial \nu} < 0 \quad (10)$$

が成り立つ。

補題6から、

$$\frac{\partial \mu}{\partial \nu} = \nabla\mu \cdot \nu < 0$$

となるが、(NFP)の境界条件から、

$$\nabla\mu \cdot \nu = 0$$

が成り立つ。したがって、 $\partial\Omega \times [0, T]$ 上で最小値をとらない。よって、

$$\min_{(y,t) \in \bar{\Omega} \times [0,T]} \mu(y, t) = \min_{y \in \bar{\Omega}} \mu(y, 0)$$

となる。よって、下からの評価が得られる。次に、上からの評価についての証明の方針を述べる。下からの評価では非線形項 $|\nabla\mu|^2$ を0で下から評価することによって、線形放物型方程式の優解となることから、線形の理論が使えた。しかし、上からの評価の際にはその方法が使えない。そのため、以下の変換を考える。 $\beta > 0$ に対して、 $\eta = e^{\beta\mu}$ とおくと、

$$\begin{aligned} \eta_t = \beta e^{\beta\mu} \mu_t, \nabla\eta = \beta e^{\beta\mu} \nabla\mu, \\ \Delta\eta = \beta e^{\beta\mu} \Delta\mu + \beta^2 e^{\beta\mu} |\nabla\mu|^2. \end{aligned}$$

が成り立つので、 η の方程式を立ててみると、

$$\begin{aligned} \eta_t - \alpha(\alpha - 1)d(x)\rho^{\alpha-1}\Delta\eta \\ + (\alpha\rho^{\alpha-1}\nabla d(x) + \nabla\phi(x)) \cdot \nabla\eta \\ - \beta(1 - \alpha(\alpha - 1)d(x)\beta\rho^{\alpha-1})|\nabla\mu|^2 = 0 \end{aligned}$$

$1 - \alpha(\alpha - 1)d(x)\beta\rho^{\alpha-1} < 0$ となるように β を十分大きくすることによって、

$$\begin{aligned} \eta_t - \alpha(\alpha - 1)d(x)\rho^{\alpha-1}\Delta\eta \\ + (\alpha\rho^{\alpha-1}\nabla d(x) + \nabla\phi(x)) \cdot \nabla\eta \leq 0 \end{aligned}$$

η は線形放物型方程式の劣解となる。したがって、 η についての方程式に対して最大値原理の証明を追うことで、上からの評価が得られる。

3. 参考文献

- [1] L. C. Evans, *Partial differential equations*, second ed., Graduate Studies in Mathematics, vol. 19, American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.
- [2] M. H. Protter and H. F. Weinberger, *Maximum principles in differential equations*, Springer-Verlag, New York, 1984, Corrected reprint of the 1967 original.