P-20

ミルズの定数の無理数性と最近の進展
Irrationality of Mills' constant and recent progress

○齋藤耕太 [1]
*Kota Saito [1]

Abstract: Let $\lfloor x \rfloor$ denote the integer part of x. In 1947, Mills constructed a real number A such that $\lfloor A^{3^k} \rfloor$ is a prime number for every positive integer k. The smallest element of such A's exists, which is called Mills' constant, say ξ. It was a long-standing problem to determine whether ξ is irrational, or not. However, the author proved that ξ is irrational. In this article, we further report the recent progress of this topic.

1. はじめに

1 と自分自身でしか割り切れないような 2 以上の整数を**素数**と呼ぶ．小さい順に並べると，

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13\ldots$$

となる．素数が無限個存在することは古くから知られていた．では，この無限に続く素数に規則はあるだろうか？この問題に対する納得のいく解答は未だに得られていない．双子素数予想，ゴールドバッハ予想，正則素数の無限性など素数に関する有名未解決問題は数多くある．人類が素数に興味を持ってから 2000 年以上も経過したが，依然として素数は魅力的な数である．さらに現在，巨大数の素因数分解の困難さは暗号理論に応用され，素数は情報社会を影から支えている．純粋数学者たちの興味の対象であった素数であるが，応用上も重要視されている．

素数にはどうやら簡単な規則はなさそうにも思える．一方，1947 年ミルズ [3] によって次の定理が示された．

定理 1 (ミルズの定理) 次を満たす 1 よりも大きい実数 A が存在する:

$$\text{各整数 } k \geq 1 \text{ に対して } \lfloor A^{3^k} \rfloor \text{ が常に素数となる．} \quad (1)$$

ただし，任意の実数 x に対して，$\lfloor x \rfloor$ を x 以下の最大の整数と定める．つまり，$\lfloor x \rfloor$ は実数 x の整数部分を指す．

ミルズの定理は一見すると素数の規則を示唆しているようにも思えるだろう．しかし，未知の素数を発見するための手法としては今のところ使い物にならない．なぜなら，素数を求めるために定数 A を計算しようとすると，大きい素数の情報が必要となるからである．つまり，

(i) 大きい素数を求めるために A を計算したい，

(ii) A を計算するためには大きい素数が必要

という循環論法に陥る．詳細は [7] や [8] に書いたのでそちらを参照してほしい．この循環論法から抜け出すためには素数とは関係のない方法で定数 A を求める必要があるが，おそらく不可能であると講演者は予想している．

2. ミルズの定数

(1) を満たすような実数 A は無限個 (より正確には非可算無限個) 存在する．そういった A の最小値は存在し，ミルズの定数と呼ばれている．ミルズの定数を ξ で表す．

注意 2 (1) を満たす実数 $A > 1$ 全体の集合を $\mathcal{W}$ とおくと，$\mathcal{W}$ は閉集合であることが知られている [1, 6]．したがって，$\mathcal{W}$ は下に有界な閉集合であるから，$\mathcal{W}$ の最小値が存在する．

ここで，次の問題を考える:

$$\text{ミルズの定数は無理数であるか？} \quad (2)$$

ここで，**有理数**とは a/b (a は整数，b は正整数) の形の実数のことを指し，**無理数**とは有理数以外の実数のことを指す．例えば，3/2 や 3 は有理数であるが，$\sqrt{2}, \log_{10} 2, \pi$ (円周率), e (自然対数の底) は無理数である．

与えられた実数が無理数か否か決定することは一般には難しい．例えば，$\pi + e, \pi e, \log\log 2$ が無理数か否かは未だに決定されていない．

ミルズの定数も長い間無理数であるかは決定されていなかった．ミルズの結果から数えて 70 年以上未解決であったともいえる．しかし，最近の研究 [4] で次を証明することができた．

定理 3 ミルズの定数は無理数である．

証明するにあたって「70 年も解けていない & 無理数性の証明は難しい」という先入観を捨てることが最も困難であった．自分の手を動かして挑戦してみないと問題の本質的な難しさはわからないだろう．

3. 一般化と超越性

複素数 α が (有理数上) **代数的数**であるとは，あるゼロでない整数係数の多項式 $f(X)$ の根となることと定義する．例えば，$\sqrt[3]{2}$ は $f(X) = X^3 - 2$ の根であり，$\sqrt{2} + \sqrt{3}$ は

1: 日大理工・助手・数学

$X^4 - 10X^2 + 1$ の根である．したがって，これらは代数的数である．代数的数でない複素数を**超越数**と呼ぶ．例えば，π, e, $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n!}$ は超越数となることが知られている．

では，(2) は解決されたため，次の問題を考える:

ミルズの定数は超越数であるか？

この問題は未だに解決されていない．そこで，今回はミルズの定数の代わりに別の似た整数を考えて，超越性や無理数性について紹介する．そのために，ミルズの定数の一般化を考える．

任意の正数列 $(C_k)_{k\geq 1}$ に対して

$$\begin{aligned}\mathcal{W}(C_k) &= \mathcal{W}((C_k)_{k\geq 1}) \\ &= \{A > 1 \mid \text{各正整数 } k \text{ に対して } \lfloor A^{C_k} \rfloor \text{ が素数}\}\end{aligned}$$

と定義する．例えば，$C_k = 3^k$ がミルズの定理に対応する．ミルズの結果以降，C_k にどういった条件を課せば $\mathcal{W}(C_k)$ の元を構成することができるのかといった問題に関心がもたれるようになった．さらに広い一般化を Wright が行っているが詳しくは [7] を見てほしい．現在知られている最良の結果は，本質的には Matomäki[2] によって次が示されている．

定理 4 正数列 $(C_k)_{k\geq 1}$ が (i) $C_1 > 0$ (ii) $C_{k+1}/C_k \geq 2$ $(k = 1, 2, 3 \ldots)$ を満たすとき，$\mathcal{W}(C_k)$ は空集合でない．さらに，$\mathcal{W}(C_k)$ の最小元が存在する．

正数列 $(C_k)_{k\geq 1}$ が定理 4 の条件を満たすとき，$\mathcal{W}(C_k)$ の最小元が存在するため，その元を $\xi(C_k)$ と書くこととする．例えば，ミルズの定数は $\xi(3^k)$ である．$\xi(C_k)$ と超越性と無理数性について次を証明した．

定理 5 正数列 $(C_k)_{k\geq 1}$ が (i) $C_1 > 0$ (ii) $C_{k+1}/C_k \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ を満たすとする．このとき，

- $\displaystyle\limsup_{k\to\infty} \frac{C_{k+1}}{C_k} \geq 4$ ならば $\xi(C_k)$ は超越数である，
- $\displaystyle\limsup_{k\to\infty} \frac{C_{k+1}}{C_k} = 3$ ならば $\xi(C_k)$ は無理数である．

ただし，$\mathbb{Z}_{\geq 2}$ は 2 以上の整数全体の集合を表す．

この定理によって，$\lfloor A^{4^k} \rfloor$ が任意の $k = 1, 2, 3, \ldots$ に対して常に素数となるような k に依らない最小の実数 $A > 1$ は存在して，超越数となることがわかる．4^k をより一般の c^k (c は 4 以上の固定された整数) に取り替えても同様の結論が成立する．

4. 最近の進展

定理 5 の条件は十分条件であって必要条件ではない．実際，条件を満たさない正数列 $(C_k)_{k\geq 1}$ で $\xi(C_k)$ が超越数であることを決定できる例をいくつか発見した [5].

定理 6 整数列 $(C_k)_{k\geq 1}$ が以下であるとき，$\xi(C_k)$ は超越数である:

- $C_k = (1+\sqrt{2})^k + (1-\sqrt{2})^k$,
- $C_k = r3^k - 1$　(r は $r \geq 4.1 \times 10^{14}$ なる整数).

特に，2 番目の例では $\limsup_{k\to\infty} C_{k+1}/C_k = 3$ となり，ミルズの定数と同じ 3 である．r はかなり大きい整数であるが，リーマン予想という整数論における重要な予想を仮定すると，r は 1 以上の整数として取れることまで明らかとなった．より一般の結果については [5] を参照せよ．

5. まとめ

素数に規則はあるか？という問題に対して未だに誰もが納得いく解答は得られていない．素数についての未解決問題は数多くあり，素数は依然として魅力的な数である．一方，1947 年，ミルズによって各整数 $k \geq 1$ に対して $\lfloor A^{3^k} \rfloor$ が常に素数となるような実数 $A > 1$ が発見された．定数 A の最小値をミルズの定数という．

ミルズの定数が無理数であるか？といった問題は長い間未解決であったが，講演者によって解決された．現在はミルズの定数の一般化や超越性について研究をしており，部分的な結果も得ている．未だにミルズの定数の超越性は証明できていないため，今後の課題として真摯に挑戦していきたい．

6. 参考文献

[1] B. Deschamps, Une propriété topologique de certains ensembles de Mills, Unif. Distrib. Theory, **12** (2017), 139–153.

[2] K. Matomäki, Prime-representing functions, Acta Math. Hungar. **128** (2010), 307–314.

[3] W. H. Mills, A prime-representing function, Bull. Amer. Math. Soc. **53** (1947), 604.

[4] K. Saito, Mills' constant is irrational, Mathematika **71** (2025), no. 3, Paper No. e70027.

[5] K. Saito, Transcendency of variants of Mills' constant, *preprint* (2025), available at `https://arxiv.org/abs/2508.16068`

[6] K. Saito, W. Takeda, Topological properties and algebraic independence of sets of prime-representing constants, Mathematika, **68** (2022), 429–453.

[7] 齋藤 耕太，ミルズの定数は無理数である，2024 年度整数論サマースクール報告書「超越数論」，308–337.

[8] 齋藤 耕太，素数を表す不思議な定数，東京出版「大学への数学」，2025 年 9 月号，58–61.