P-3

有理タングルの同値類と有理数の１対１対応について
On the One-to-One Correspondence between Equivalence Classes of Rational Tangles and Rational Numbers

○田村響紀 [1]
*Hibiki Tamura[1]

Abstract: It is known that the equivalence classes of rational tangles correspond to the rational numbers together with ∞. As a preparation for proving this, this paper outlines Conway's notation for rational tangles.

1. 結び目の基礎

1 本の紐を手に取って結んでみる. そして紐の両端をつなぎ目が分からないようにつなぐと, 結び目のついた輪が出来上がる. このような輪のことを**結び目 (knot)** という. このときの紐を理想的に細くして 1 つの曲線と考えると, 結び目とは空間内に埋め込まれた 1 つの閉曲線と考えることができる. また, 互いに交わりのない有限個の結び目 K_i の和集合 $K_1 \cup \cdots \cup K_n$ を**絡み目 (link)** という. このときの各 K_i をこの絡み目の**成分**という.

定義 1 結び目の同値

K を $\mathbb{R}^3$ の中にある結び目とし,$\mathbb{R}^3$ には xyz 軸 が右手系になっているように方向をつけておく. K を別の結び目 K' に移すような $\mathbb{R}^3$ の方向を保つ自己同相写像 φ があるとき,K と K' は**同値**であるといい,$K \approx K'$ と表す.

結び目 K のある平面上への射影図 $\hat{K}$ を考える.$\hat{K}$ は平面上でいくつか交点を持っているが,K を空間内で適当に動かし,$\hat{K}$ のすべての交点を二重点にすることができる. さらに二重点のところで線分の上下関係がわかるように下の弧を切れているように図を描く. このような $\hat{K}$ を K の**正則図形**という.

正則図形の部分弧 AB を, 交点の状況を変えない別の弧 ACB に置き換える操作, またはその逆を**初等変形**といい,Ω_0 で表す.

定義 2 *Reidemeister* 変形

図 1 で与えられる交点の状況を変える結び目の正則図形の 3 つの変形操作 $\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3$ を ***Reidemeister* 変形**という.

定義 3 正則図形の同値

正則図形 D が他の正則図形 D' に 4 つの操作 $\Omega_0,\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3$ またはその逆の操作を有限回施して変形できるとき,D と D' は**同値**であるといい,$D \approx D'$ と表す.

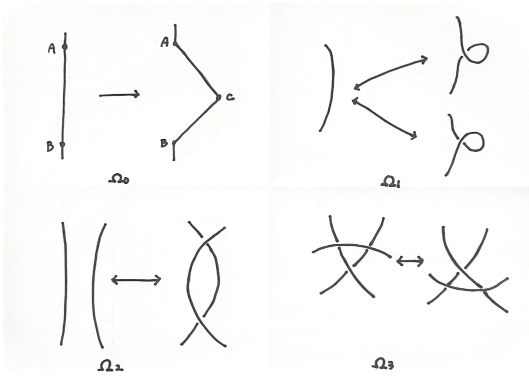

図 1: 初等変形と Reidemeister 変形

定理 4 *2* つの結び目 *(*または絡み目*)*K と K' の正則図形を D と D' とするとき,

$$K \approx K' \Leftrightarrow D \approx D'$$

この定理の詳しい証明は [2] の p.42-p.47 にある.

2. タングルの表記

定義 5 タングル

4 本の弧がコンパスの方位である *NW,NE,SW,SE* を指し示す結び目の図の一部分のことを**タングル**という.

NW の弧のことを**主ひも (leading string)** といい,$NW-SE$ の軸のことを**主対角線 (principal diagonal)** という.

タングル t を図 2 のように, 円の中に L を描き, そこから 4 本の弧が出るように描き, 添え字として t を書いて表す. このタングル t を基にして,“**回転**”と“**反射**”の 2 つの操作から t を含めて図 2 の 8 個のタングルを得ることができる.

それぞれ t_h は水平に（回転軸が平面内の水平方向の）回転の操作をしたものであり,t_v は垂直に（回転軸が平面内の垂直方向の) 回転の操作をしたものである.t_r は t_{vh} や t_{hv} と表記することもでき,t に水平の回転と垂直の回転の 2 回操作したものである. また、$-t$ は平面に関して反射の

1: 日大理工・院 (前)・数学

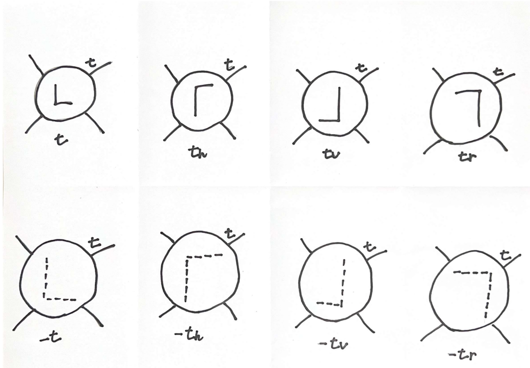

図 2: 回転と反射から得られるタングル

操作（正則図形において, 交点での弧の上下を入れ替える）をしたものである.

図 3 の操作によってタングルどうしの和や積, タングルの変形を与えることができる.

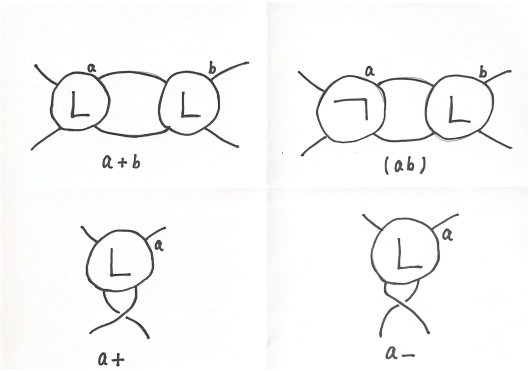

図 3: $a+b$　(ab)　$a+$　$a-$

2 つのタングル a と b を用意する. タングル a の NE と SE をタングル b の NW と SW を結ぶ, このときのタングル a の NW と SW, タングル b の NE と SE を新しいタングルの NW,SW,NE,SE としたものを $a+b$ とし, タングルの和と定める. また, タングル a を主対角線を軸に反射の操作をした後, 新しいタングル a の NE と SE をタングル b の NW と SW を結んだものを (ab) とし, タングルの積と定める.

すべてのタングルは 0 と ∞ の 2 つのタングルから図 3 の操作によって得ることができる.

3. 整タングルと有理タングル

定義 6 整タングル

∞ のタングルに $+$ の操作を施したタングルを 1 とし,$-$ の操作を施したものを $\bar{1}$ とする. このとき, タングル n を $n=1+1+\cdots+1$ とし,$\bar{n}$ を $\bar{n}=-n=\bar{1}+\bar{1}+\cdots+\bar{1}$ とする. このように表記できる n,$\bar{n}$ を整タングルという.

定義 7 有理タングル

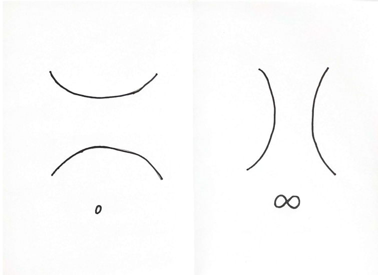

図 4: タングル 0 とタングル ∞

$m,n,p,\cdots,s,t$ を整タングルとする. このとき,$((\cdots(mn)p)\cdots)s)t)$ とタングルの積を考え, カッコを省略して表記した,$mnp\cdots st$ を有理タングルとする.

定義 8 タングルの同値

初等変形 Ω_0 と *Reidemeister* 変形 Ω_1,Ω_2,Ω_3 またはその逆の操作を有限回施してタングル a から別のタングル b に変形できるとき, タングル a とタングル b は同値であるという.

2 つの有理タングル $ijk\cdots lm$ と $npq\cdots st$ が同値になるのは 2 つの連分数

$$m+\cfrac{1}{l+\cdots\cfrac{1}{k+\cfrac{1}{j+\cfrac{1}{i}}}} \qquad t+\cfrac{1}{s+\cdots\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{p+\cfrac{1}{n}}}}$$

が等しい場合に限る.

つまり, 次のことが言える.

定理 9 有理タングル同値類と有理数全体（∞ を含む）とは 1 対 1 対応する.

この定理の詳しい証明は [4] にある.

4. 参考文献

[1] J.H.Conway, An enumeration of knot and links, and some of their algebraic properties, 329-358 (Computetional Problems in Abstract Algebra, Pergamon Press, New York, 1970)

[2] 村杉邦男, 結び目理論とその応用, 日本評論社, 1993

[3] C.Adams, The Knot Book An Elementary Introduction to the Mathematical Theory of Knot, American Mathematical Society, 2004 (C. アダムス　金信泰造 (訳), 結び目の数学 結び目理論への初等的入門, 丸善出版, 2021)

[4] J.R.Goldman and L.H.Kauffman, Rational Tangles, Adv. Appl. Math. 18, 300-332, 1997