P-4

留数定理における有限 Blaschke 積と Pólya の問題
Finite Blaschke product in Residue theorem and Pólya's problem

○遠藤司琉
*Shiryu Endo

Abstract: We introduce one of Pólya's problems asking conditions to be a polynomial, an integer-valued entire function at positive integers. Toward generalizations of Pólya's observation, we explain how it plays, the finite Blaschke product in Residue theorem, to obtain refined arithmetic estimates of an entire function having sufficiently many zeros.

1. はじめに

本稿においては整数や有理数において数論的に興味深い値を持つ一変数複素関数のうち，整関数つまり $\mathbb{C}$ 全体で正則な関数を考察する．$F(z) \in \mathbb{Z}[z]$ ならば $F(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$ である．$F(z) = \binom{z}{k} = \dfrac{z(z-1)(z-2)\cdots(z-k+1)}{k!}$ は $F(z) \in \mathbb{Q}[z]$ となり，$F(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$ である．超越整関数で非零の代数的数において超越数（代数的数ではない複素数）の値をとる整関数 としては $\exp(z)$ がある．一方，代数的数において常に代数的な値をとる超越整関数の存在も P. Stäckel[6] により示されている．このように関数と値の関係については数論的観点からの先行研究があるが，本稿では正整数で整数の値をとる整関数に対する G. Pólya の問題と定理 [5] を紹介し，留数定理を本質的に用いた Pólya の証明の精密化に役立つ有限 Blaschke 積に関して論ずる．

2. 準備

記号 2.1. $r > 0$ に対し, $B_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$ とおく．

定義 2.1 (Order)**.** $z \in \mathbb{C}$ に対し, 整関数すなわち全平面 $\mathbb{C}$ で正則な関数 $f(z)$ を考える. B_r における $f(z)$ の最大値を

$$|f|_r := \sup_{z \in B_r} |f(z)|$$

とおく. また指数関数と比べた $f(z)$ の増大度として

$$\rho(f) := \limsup_{r \to +\infty} \frac{\log |f|_r}{r} \tag{1}$$

を定め, $f(z)$ の *Order (*位数*)* という.

例 2.1. $\rho(e^z) = 1$, $\rho(z \text{ の多項式}) = 0$ である.

定義 2.2 (分母)**.** 代数的数全体を $\overline{\mathbb{Q}}$ と書く. $\beta \in \overline{\mathbb{Q}}$ に対しては正整数 D が存在し, $D \cdot \beta$ は代数的整数（最高次係数 1 の整数係数最小多項式をもつ代数的数）になる. このような D の最小値を β の分母といい, $den(\beta)$ で表す.

定義 2.3 (Size)**.** $\mathbb{Q}$ 上 d 次の代数的数 $\beta \neq 0$ に対し, *Size* を

$$s(\beta) = \max\{\log \overline{|\beta|}, \log den(\beta)\} \text{ と定める.} \tag{2}$$

ここで $\overline{|\beta|} = \max\{|\beta_1|, \cdots, |\beta_d|\}$, $\beta_1, \ldots, \beta_d$ は β の $\mathbb{Q}$ 上の共役元, $den(\beta)$ は β の分母である.

補題 2.1 (Fundamental inequality)**.** $\mathbb{Q}$ 上 d 次の代数的数 $\beta \neq 0$ に対し一般に次が成り立つ.

$$\log |\beta| \geq -2d \cdot s(\beta).$$

Proof. $\mathbb{Q}(\beta)$ から $\mathbb{Q}$ への β の Norm をとれば従う. □

3. Pólya の定理

Pólya の定理とは以下に述べるものである [5].

定理 3.1 (Pólya, 1915)**.** $\mathbb{C}$ における整関数 $F(z)$ が

$$F(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z} \quad (\textit{resp. } F(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z})$$

$$\text{かつ } \rho(F) < \log 2 \quad \left(\textit{resp. } \rho(F) < \log \tfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$$

を満たすならば, $F(z) \in \mathbb{Q}[z]$, つまり多項式である.

定義 3.1 (Blaschke 積)**.** 実数 $R > 0$ を固定し, 有限個の 0 でない点 $z_1, \ldots, z_\sigma$ を B_R 内に取る.

$$B(z) = \prod_{j=1}^{\sigma} \frac{R^2 - z\bar{z}_j}{R(z - z_j)} \tag{3}$$

を（有限）*Blaschke* 積という.

注 3.1. $|z| = R$ の円周上では $|B(z)| = 1$ が成り立つ.

記号 3.1. 半径 $\rho > 0$ の円板 B_ρ 内にある, 恒等的に零ではない正則関数 f の零点を重複度を含め $z_1, \ldots, z_\sigma$ とするとき, 円板 B_ρ 内の $f(z)$ の零点の個数を $n(f, \rho)$ とおく.

補題 3.1. R_1, R_2, ρ を $R_2 > R_1 > 0$, $R_2 \geq \rho > 0$ を満たす実数, $f(z)$ を円板 B_{R_2} を含む開集合で正則かつ, B_{R_2} 内で恒等的に 0 でない関数とする. このとき次が成立する.

$$n(f, \rho) \log\left(\frac{R_2^2 - R_1\rho}{R_2(R_1 + \rho)}\right) \leq \log \frac{|f|_{R_2}}{|f|_{R_1}}. \tag{4}$$

同様の考察により以下も得られる.

$$n(f, \rho) \log\left(\frac{R_2^2 + R_1\rho}{R_2(R_1 + \rho)}\right) \leq \log \frac{|f|_{R_2}}{|f|_{R_1}}. \tag{5}$$

日大理工・院 (前)・数学

注 3.2. 補題 3.1 の証明には Blaschke 積を用いるが, Blaschke 積を用いない場合には

$$n(f,\rho)\log\left(\frac{R_2-R_1}{R_1+\rho}\right)\le\log\frac{|f|_{R_2}}{|f|_{R_1}} \qquad (6)$$

が従う. (4) と (6) を比べると, 零点の個数 $n(f,\ \rho)$ は Blaschke 積を用いる方が, より小さく評価できる.

定理 3.2. 与えられた情報にのみ依存して, 有限回の手続きで計算可能な定数 $C>0$ が存在して以下が成り立つ. $f(z)$ を整関数とする. 任意の $R>0$ に対し, $\mathrm{Card}(\mathbb{N}\cap B_R)\ge R$ とする. また $\forall n\in\mathbb{N}$ に対して

$$f(n)\in\mathbb{Q} \qquad (7)$$

および $\max_{n\in\mathbb{N}\cap B_R} s(f(n))\le R$ かつ $\max\log|f|_R\le\dfrac{R}{C}$ (8)

が成り立つと仮定する. このとき $f(z)$ は $\mathbb{Q}$ 係数の多項式.

Proof. k_0 を整数で $k_0>2$ を満たすものとし, h_0 を実数で $2/k_0<h_0<1$ を満たすものとする. N を十分大きな整数とする. $c_1,c_2,c_3>0$ は k_0 のみに依存する計算可能な定数で, $c_3>c_2$ を満たすものとする.

まず, 絶対値が $\exp(c_1N)$ 未満で, すべてが 0 でない整数 $a_{h,k}$ $(0\le h<h_0N,\quad 0\le k<k_0)$ に対し補助関数

$$F(z)=\sum_{0\le h<h_0N}\sum_{0\le k<k_0}a_{h,k}\binom{z}{h}f(z)^k \qquad (9)$$

を $F(n)=0$ $(\forall n\in\mathbb{N}\cap B_N)$ が成立するように構成する.

このためには h_0k_0N 個の未知数をもつ高々$2N+1$ 個の $\mathbb{Q}$ 係数 1 次方程式を解けば良い. 各 $n\in\mathbb{N}\cap B_N$ に対し

$$\binom{n}{h}f(z)^k \quad (0\le h<h_0N,\quad 0\le k<k_0)$$

の共通分母は k_0N 以下, Size は二項係数の評価により $(h_0+2)N$ 以下である. ゆえに C. L. Siegel の補題 [4] より $\log\max|a_{h,k}|<c_1N$ を満たす非自明解 $a_{h,k}\in\mathbb{Q}$ が存在.

以下, 任意の整数 $M\ge N\ge1$ に対して次のような二重帰納法を行う. まず

(I)$_M$: $^\forall m\in\mathbb{N}\cap B_M$ に対し, $F(m)=0$
(II)$_M$: $\log|F(m)|<-c_3M$

とおく.

(第 1 段階): 最初に $M=N$ のときの (I)$_N$ の成立を示す.
(第 2 段階): (II)$_M\Rightarrow$(I)$_M$ を示す.
(第 3 段階): (I)$_M\Rightarrow$(II)$_{M+1}$ を示す.

(第 1 段階): $M=N$ のときの (I)$_N$ に関しては, 元の F の構成から成り立つ.

(第 2 段階): 次に, (II)$_M\Rightarrow$(I)$_M$ を示そう.

$m\in\mathbb{N}$ に対して, その構成から $F(m)$ の分母は高々 k_0m であり, Size は高々

$$\log[k_0(h_0N+1)]+c_1N+(m+h_0N)\log2+k_0m \qquad (10)$$

である. $m\ge N$ に対して, 補題2.1で $\beta=F(m)$ とすると $F(m)=0$ または $\log|F(m)|\ge-c_2m$ が成り立つが, 仮定 (II)$_M$ と $c_3>c_2>0$ より $F(m)=0$ が従う.

(第 3 段階): 最後に, (I)$_M\Rightarrow$(II)$_{M+1}$ を示す.

(I)$_M$ を仮定する. このとき $R>M$ に対し, 補題 3.1 の (5) において $R_2=R, R_1=M+1, \rho=M+1$ とすると (I)$_M$ より $M\le n(F,M+1)$ であり,

$$\log|F|_{M+1}\le\log|F|_R-M\log\frac{R^2+(M+1)^2}{2R(M+1)}. \qquad (11)$$

ここで定数 $1<\ell_0\in\mathbb{R}$ を十分大きくとり $R=\ell_0(M+1)$ として計算すると $c_3>0$ に対し

$$\log|F|_{M+1}<-c_3(M+1). \qquad (12)$$

特に任意の整数 $M\ge1$ で (II)$_{M+1}$ も成立する.

$F(z)$ が整関数であることと (12) より, $F\equiv0$ すなわち F は恒等的に 0 となって, $f(z)$ は $\mathbb{Q}$ 係数の多項式になる. □

4. 今後の課題

上記の Pólya の定理について, Gauss 整数 [2] において, より条件を緩めた一般化について考察したい.

5. 参考文献

[1] H. Furutsu and N. Hirata-Kohno, *Conditions of an analytic function to be a polynomial via Diophantine approximations*, J. Res. Inst. Sci. Tec., Nihon Univ. **136** (2016), 12–16.

[2] F. Gramain, *Sur le théorème de Fukasawa–Gel'fond*, Invent. Math. **63** (3) (1981), 495–506.

[3] F. Gramain, M. Mignotte and M. Waldschmidt, *Valeurs algébrique de fonctions analytiques*, Acta Arith. **47** (1986), 97–121.

[4] M. Ito and N. Hirata-Kohno, *Optimization for Lattices and Diophantine Approximations,* Interdisciplonary Infirmation Sciences **19** (2) (2013), 135–142.

[5] G. Pólya, *Über ganzwertige ganze Funktionen*, Rend. Circ. Math. Palermo **40** (1915), 1–16.

[6] P. Stäckel, *Über arithmetische Eigenschaften analytischer Functionen*, Math. Ann. **46** (1895), 513–520.

[7] M. Waldschmidt, *Pólya's theorem by Schneider's method*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **31** (1978), 21–25.