

非正則連分数展開を用いた無理数性の証明について  
The irrationality proof relying on an irregular continued fraction expansion

○一瀬陽雲  
Yakumo Hitose

Abstract: It is known that Ch. Hermite asserts the transcendence of  $e^x$  with non-zero algebraic  $x$ , whose proof has underlying concept of Diophantine approximation closely related to continued fractions. Although general statements exist, we show a simple alternative proof of the irrationality of  $e^x$  with  $x$  non-zero rational, relying on *irregular* continued fraction expansions.

1. はじめに

Napier 数  $e$  の無理数性が指数関数の Taylor 展開から従うことは、最初に微分積分学で学ぶ内容であろう。  $e$  の無理数性の証明は基本的に指数関数の特殊性に則る。非零の代数的数  $x$  における  $e^x$  の超越性も Ch. Hermite の証明から従うが、他にも様々な研究がある。本稿では L. Euler による連分数展開から導出される  $e^x$  の非正則連分数展開を用いて、  $0 \neq x \in \mathbb{Q}$  に対する  $e^x$  の無理数性の簡単な別証明 [7] を与える。

2. 正則連分数とは

**定義 2.1.**  $a_0 \in \mathbb{Z}, a_1, a_2, \dots, a_N \in \mathbb{N}$  に対し、有理数

$$[a_0, a_1, \dots, a_N] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_N}}}} \quad (1)$$

を考える。  $p_n, q_n \in \mathbb{Z}$  を  $p_0 = a_0,$

$$p_1 = a_1 a_0 + 1, p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \quad (2 \leq n \leq N)$$

$$q_0 = 1, q_1 = a_1, q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \quad (2 \leq n \leq N)$$

と定める ( $q_n > 0$ )。このとき  $[a_0, a_1, \dots, a_N] = \frac{p_N}{q_N}$  となる。

$[a_0, a_1, \dots, a_N]$  を  $N$  次近似分数、各  $a_n (0 \leq n \leq N)$  を部分商と呼ぶ。  $\{q_n\}$  は狭義単調増加で  $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1}$  が成立、即ち  $p_n, q_n$  は常に互いに素になる。  $n \geq 2$  に対しては  $a_n > 1$  とすれば、  $0 < X \in \mathbb{Q}$  に対し、(1) の表示は一意的である。さらに任意の  $X \in \mathbb{R}$  に対しその最大整数部分を考え、  $[X] = a_0, X - a_0 = \xi_0, a_1 = \left\lfloor \frac{1}{\xi_0} \right\rfloor,$   $\xi_1 = \frac{1}{\xi_0} - a_1, \dots$  と定めると  $\xi_n \neq 0$  である限り、この操作は続き、同様の表示が可能であるため、  $X \in \mathbb{R}$  の正則連分数展開として、式 (1) の分子 1 の分数  $[a_0, a_1, \dots, a_N] = \frac{p_N}{q_N}$  を用いた  $X$  の表示を定めることができる。

**命題 2.1.**  $X \notin \mathbb{Q}$  と正則連分数展開が無限に続くことは同値であり、このとき数列  $\frac{p_N}{q_N}$  は収束して、以下が成立。

$$X = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{p_N}{q_N}.$$

3. 非正則連分数とは

前節の式 (1) の分子が 1 には限らない形の連分数展開をまず形式的に考え、一般に非正則連分数という。

Euler より  $e^{1/n} = [1, n-1, 1, 1, 3n-1, 1, 1, 5n-1, \dots] = [1, (2m+1)n-1, 1]_{m \geq 0}$  (上付きの  $-$  は周期部分) が知られるが、非正則連分数でも元の値に収束する有理数列が存在する場合は、正則と同様の考察を進められる。非正則連分数の収束の判定条件や、元の数に対する、無理数判定条件が [2] にあるが、その J. A. Nathan による簡略化 [7] を紹介する。本稿では非正則連分数として、以下の形を扱う。

**定義 3.1** (非正則連分数).  $a_i, b_i \in \mathbb{R}, a_i \neq 0 (i = 0, 1, \dots)$  に対し、以下の表示を定める。

$$\left[ \frac{a_i}{b_i} \right]_{i=1}^{\infty} := \left[ \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \dots \right] = \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{\ddots}}}. \quad (2)$$

**定理 3.1** (Hall and Knight, 1887 [1]). 自然数  $M \in \mathbb{N}$  が存在して、条件 (I) (II) が成立するならば (2) は収束し、極限値は無理数になる。

(I)  $1 \leq i \leq M$  に対し  $a_i, b_i$  は有理数で、  $b_i \neq 0$ .

(II) 全ての  $i \geq M+1$  に対して  $a_i, b_i$  は正整数かつ  $b_i > a_i$ .

*Proof.*  $\alpha := \left[ \frac{a_i}{b_i} \right]_{i=M+1}^{\infty}$  とおく。  $\left[ \frac{a_i}{b_i} \right]_{i=1}^{\infty} = \left[ \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \dots, \alpha \right]$  より、  $\alpha \notin \mathbb{Q}$  を示せば十分である (条件 (I) より番号  $M$  以下の部分は有理数)。  $\alpha \in \mathbb{Q}$  と仮定して矛盾を導く。  $k = 0, 1, \dots$  に対して以下を定める。

$$f_k = \left[ \frac{a_{M+k}}{b_{M+k}} \right]_{i=k+1}^{\infty} \quad \text{即ち} \quad f_k = \frac{a_{M+k+1}}{b_{M+k+1} + f_{k+1}}. \quad (3)$$

仮定から  $0 < f_k < 1 (k = 0, 1, \dots)$  である。  $f_0 = \alpha$  で、さらに  $f_k \in \mathbb{Q}$  より  $f_{k+1} \in \mathbb{Q}$  が従う。ここで  $f_k = \frac{p_k}{q_k}$  とおくと、  $p_k, q_k$  は互いに素な正整数になる ( $q_k > p_k$ )。

式(3)より,  $f_{k+1} = \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} = \frac{q_k a_{M+k+1} - p_k b_{M+k+1}}{p_k}$  即ち  $p_{k+1} < q_{k+1} \leq p_k$  となつて,  $p_0, p_1, p_2, \dots$  は狭義減少の正整数の無限列になるが, これは不可能. 従つて  $\alpha \notin \mathbb{Q}$ .  $\square$

定理3.1を適用して, Nathan による  $e^y$  の無理数性を証明する.

**定理 3.2.** 任意の非零有理数  $y$  に対し,  $e^y$  は無理数である.

*Proof.* [7]

$e^y$  の非正則連分数展開として  $\tan y$  の展開から得られる Euler の次式(4)を用いると, この連分数は  $\forall y \in \mathbb{R}$  に対し  $N \rightarrow \infty$  のときに  $e^y$  に収束することが判定できる.

$$e^y = \left[ \frac{1}{1}, \frac{-2y}{2+y}, \frac{y^2}{6}, \frac{y^2}{10}, \dots, \frac{y^2}{4N+2}, \dots \right]. \quad (4)$$

今  $h, t \in \mathbb{Z}, t > 0$  とする. 非正則連分数(2)に現れる任意の3つ組  $(b_k, a_k, b_{k+1})$  は  $t$  倍しても収束値は不変であることより, (4)において  $k = 2, 3, \dots$  に対し, 各  $(b_k, a_k, b_{k+1})$  を  $t$  倍すると ( $t \in \mathbb{Z}$ ),

$$e^y = \left[ \frac{1}{1}, \frac{-2yt}{(2+y)t}, \frac{t^2 y^2}{6t}, \frac{t^2 y^2}{10t}, \dots, \frac{t^2 y^2}{(4N+2)t}, \dots \right] \text{ となる.}$$

従つて  $y = \frac{h}{t}$  ( $h, t \in \mathbb{Z}$ ) のときに以下が得られる.

$$e^{h/t} = \left[ \frac{1}{1}, \frac{-2h}{h+2t}, \frac{h^2}{6t}, \frac{h^2}{10t}, \dots, \frac{h^2}{(4N+2)t}, \dots \right].$$

上記では  $h = 0$  の場合を除いて, 収束値が無理数になるための定理3.1の条件

$$N > \frac{h^2 - 2t}{4t}$$

が成立している.  $h = 0$  の場合は  $e^0 = 1$  である. 以上より, 任意の有理数  $y \neq 0$  に対して  $e^y$  は無理数になる.  $\square$

最後に Hermite [2] [3] による  $e$  の有理数乗の無理数性の証明を記述して比較しよう.

*Proof.* [2, Theorem 48]

$t, h \in \mathbb{Z}, y = \frac{h}{t} \in \mathbb{Q}$  かつ  $e^y \in \mathbb{Q}$  ならば,  $e^{ty} = e^h$  も有理数.  $e^{-h}$  が有理数ならば,  $e^h$  も有理数. 従つて正整数  $h$  に対し  $e^h$  が有理数になり得ないことを証明すれば十分である. 正整数  $a, b$  に対し  $e^h = \frac{a}{b}$  と仮定して矛盾を導く.

$$F(x) = h^{2n} f(x) - h^{2n-1} f'(x) + \dots - h f^{(2n-1)}(x) + f^{(2n)}(x)$$

とおく. ただし  $f(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}$  とする.  $F(0), F(1)$  が整数であることと,  $\frac{d}{dx} \{e^{hx} F(x)\} = h^{2n+1} e^{hx} f(x)$  より,

$$b \int_0^1 h^{2n+1} e^{hx} f(x) dx = aF(1) - bF(0) \quad (5)$$

は整数になる(式(5)は Hermite の恒等式と呼ばれる等式). しかし  $0 < x < 1$  に対しては  $0 < f(x) < \frac{1}{n!}$  である. これより(5)の整数は十分大きい  $n$  に対して

$$0 < b \int_0^1 h^{2n+1} e^{hx} f(x) dx < \frac{bh^{2n} e^h}{n!} < 1$$

となるが, 0 と 1 の間に整数が存在することになり矛盾.  $\square$

両者の証明を比較すると, Nathan の証明のように収束する非正則連分数展開を有し, 定理3.1が使えるならば, 無理数性の証明が可能である. これは Hermite の恒等式や, Legendre 多項式の一つである  $f(x)$  のような適切な対象が見つからない場合は, 有効である.

#### 4. 今後の課題

円周率  $\pi = [3; 7, 1, 15, \dots]$  に対しては, 種々の非正則連分数展開は知られているが, 正則連分数展開の一般形の確立はいまだに未解決である. 自然対数の有理数における値についても同様である.

今後は, 連分数展開を用いて, 様々な数の新たな性質を調べたいと考えている.

#### 5. 参考文献

- [1] H. S. Hall and S. R. Knight, *Higher Algebra*, 1st edition, 1887, 4th edition, 1891, Macmillan.
- [2] G. H. Hardy and E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, 1st edition, 1938, Clarendon, 6th edition, 2009, Oxford Univ. Press.
- [3] Ch. Hermite, *Sur la fonction exponentielle*, C. R. Acad. Sci. Paris **77** (1873), 18–24, 74–79, 226–233, 285–293; *Oeuvres III*, 150–181.
- [4] A. N. Khovansky, *Applications of Continued Fractions and their Generalization to Problems in Approximation theory*, 1963, Noordhoff, Groningen, Chap. II, p. 114.
- [5] A. Ya. Khinchin, *Continued Fractions*, 1st ed. in Russian, 1935, Engl. Trans. 1964, Univ. Chicago Press, 1997, Dover edition.
- [6] F. Lindemann, *Über die Zahl  $\pi$* , Math. Ann. **20** (1882), 213–225.
- [7] J. A. Nathan, *The Irrationality of  $e^x$  For Nonzero Rational  $x$* , Amer. Math. Monthly, **105** (8) (1998), 762–763.
- [8] W. Zudilin, *Analytic Methods in Number Theory, when complex numbers count*, Monographs in Number Theory, **11**, 2023, World Scientific.