

対数一次形式による完全累乗数の間隙評価
 Linear forms in logarithms giving a lower bound of gaps among distinct perfect powers

○木村桂馬
 *Keima Kimura

Abstract: In this article, we show how efficient in number theory, so-called *the linear forms in logarithms*. We demonstrate examples where the linear forms in logarithms play crucial roles, in particular, to solve exponential Diophantine equations, giving a lower bound of gaps among distinct perfect powers. We discuss related open problems.

1. はじめに

本稿においては数論における決定的手法の一つである対数一次形式と称するディオファントス近似を紹介する。対数一次形式の適用によって異なる完全累乗数の差を下から評価することが、指数型方程式の求解問題に直結する事実及び、関連する未解決予想を述べる。

2. 指数型ディオファントス方程式

まず下記の未解決予想を述べよう。

予想 1 (Pillai 予想, 1945).

$a, b, k \in \mathbb{Z} - \{0\}$ を固定する。未知数を $x, y, m, n \in \mathbb{Z}, x \geq 2, y \geq 2, m \geq 3, n \geq 2$ の範囲で考える。このとき方程式

$$ax^m - by^n = k \tag{1}$$

の整数解 $(x, y, m, n) \in \mathbb{Z}^4$ は有限個に限る。

上記は S. S. Pillai による予想であるが、現時点においても未解決である。 $a = b = k = 1$ の場合には E. Catalan によって 1844 年に提唱された, Catalan 予想と呼ばれるものであり, P. Mihăilescu [4] が完全に証明した。

定理 1 (Mihăilescu, 2004).

未知数を $x, y, m, n \in \mathbb{Z}, x \geq 3, y \geq 2, m \geq 2, n \geq 2$ の範囲で考える。このとき方程式

$$x^m - y^n = 1$$

の整数解は $(x, y, m, n) = (3, 2, 2, 3)$ の 1 個に限る。

実際, $3^2 - 2^3 = 1$ である。ただし整数解 $(m, n, x, y) \in \mathbb{Z}^4$ が有限個であることまでは、対数一次形式を用いて 1976 年に R. Tijdeman が証明している (M. Langevin による計算では $\max\{x^m, y^n\} < \exp \exp \exp \exp(730)$ まで知られていた)。なお, $k \geq 2$ を固定した場合の方程式 $x^m - y^n = k$ の解の有限性が未解決であるとは、完全累乗数の間隔が無限大に発散するのかがどうかが不明であることを意味する。

定理 1 において底を $x = 3, y = 2$ に限定したものが、次の定理 2 である。

定理 2 (LeVeque, 1952).

未知数を $m, n \in \mathbb{Z}, m \geq 2, n \geq 2$ の範囲で考えた方程式

$$3^m - 2^n = 1$$

の解は $(m, n) = (2, 3)$ に限る。

定理 2 の一般化である定理 4 を次節に述べ、その証明を対数一次形式を用いて示す。

3. 完全累乗数の間隔の下からの評価

定理 3 (完全累乗数の間隔評価). [1, Theorem 3.1]

全ての $\forall m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対して、

$$|2^m - 3^n| > 2^m (e \cdot m)^{-8.4 \cdot 10^8}$$

が成り立つ。

後述の定理 5 (対数一次形式) を用いて、定理 3 を証明する。

Proof.

今 $n \geq 2$ とする。整数 m, m' を

$$2^{m'} < 3^n < 2^{m'+1}$$

$$|3^n - 2^m| = \min\{3^n - 2^{m'}, 2^{m'+1} - 3^n\}$$

を満たすようにとる。このとき m は $m', m' + 1$ のどちらかと等しくなり、なおかつ

$$\begin{cases} |2^m - 3^n| < 2^m, \\ (m-1) \log 2 < n \log 3 < (m+1) \log 2 \end{cases} \tag{2}$$

が成り立つことを示すことができる。 $m \geq n$ と仮定し、 $\Lambda = 3^n \cdot 2^{-m} - 1$ とおく。 $\alpha_1 = 3, A_1 = 3, \alpha_2 = 2, A_2 = 2$ に対して定理 5 を用いれば、

$$\log |\Lambda| > -30^5 \cdot 2^{11/2} (\log 2) (\log 3) (\log (e \cdot m))$$

$$\therefore |\Lambda| > (e \cdot m)^{-8.4 \cdot 10^8}$$

となり定理 3 が従う。 □

定理3から導くことのできる例として定理4を紹介する.

定理4 (指数型ディオファントス不等式). [1, Theorem 3.2] 未知数を $m, n \in \mathbb{Z}, m \geq 4, n \geq 2$ の範囲で考えた不等式

$$|2^m - 3^n| \leq 20 \quad (3)$$

の解は $(m, n) = (6, 4), (8, 5)$ に限る.

実際, $|2^6 - 3^4| = 17, |2^8 - 3^5| = 13$ である. 定理4は前節の定理2の拡張である. この証明には連分数に関する A. M. Legendre の定理を用いる.

補題1 (Legendre). [5, Theorem 5C]

$\xi \in \mathbb{R}$ とする. このとき不等式

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{2q^2}$$

を満たす $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ ($p, q \in \mathbb{Z}, q > 0$ かつ q と p は互いに素) は ξ の正則連分数展開に現れる近似分数になる.

この補題1を用いて以下に定理4を証明する.

Proof.

式(3)を満たす $m, n \in \mathbb{Z}, n \geq 6$ に対し, 定理3から

$$\log 20 > m \cdot \log 2 - 8.4 \cdot 10^8 (1 + \log m)$$

となり, $m < 4 \cdot 10^{10}$ である.

式(2)より,

$$n < \frac{(m+1) \cdot \log 2}{\log 3} < 3 \cdot 10^{10}$$

を得る. また, $|x| < \frac{1}{2}$ を満たす $x \in \mathbb{R}$ に対して,

$$|\log(1+x)| \leq 2|x|$$

であることから, 式(3)は

$$\left| \frac{\log 3}{\log 2} - \frac{m}{n} \right| \leq \frac{40}{n \log 2} \cdot 3^{-n} \quad (4)$$

と変形できる.

$n \geq 6$ より式(4)の右辺 $< \frac{1}{2n^2}$ である. 従って補題1より $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ は $\xi = \frac{\log 3}{\log 2}$ の近似分数になる. さらに, $n < N = 3 \cdot 10^{10}$ に対して, 連分数に関する性質 [5, Chap 1, §5] から $|m - n\xi|$ の最小値は分母が N 未満になるまで ξ の連分数展開を繰り返したときの最後の近似分数で表せて

$$\left| \frac{\log 3}{\log 2} - \frac{m}{n} \right| > 9.6 \cdot 10^{-18} \quad (0 < n < 3 \cdot 10^{10}) \quad (5)$$

となることが従う. 式(4)と式(5)を比較すると $n \leq 36$ が得られる. $6 \leq n \leq 36$ における計算から, $n \geq 6$ のときに式(3)に整数解は存在しないことが従う. \square

4. 対数一次形式

代数的数 $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ の最小多項式として整数係数かつ, 原始多項式になるもののみ考える. 最小多項式の最高次係数を a_0 と表す. 以下に logarithmic height を定義する.

定義1 (logarithmic height). \mathbb{Q} 上の次数 d の代数的数 $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ に対し

$$h(\alpha) = \frac{1}{d} \log \left(|a_0| \prod_{k=1}^d \max\{1, |\alpha^{(k)}|\} \right)$$

を α の logarithmic height という. ここで $\alpha^{(k)}$ は α の \mathbb{Q} 上の全ての共役元とする ($k = 1, \dots, d$).

5. 対数一次形式

A. Baker により証明された定理を以下に述べる.

定理5 (A. Baker). [1, Theorem 2.2] $n \in \mathbb{Z}$ ($n \geq 1$), $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \{0\}$, $D = [\mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) : \mathbb{Q}]$ とおく. A_1, \dots, A_n を

$$\log A_j \geq \max\{h(\alpha_j), |\log \alpha_j|/D, 0.16/D\} \quad (1 \leq j \leq n)$$

を満たす実数とする ($h(\alpha_j)$ は α_j の logarithmic height).

$b_1, \dots, b_n \in \mathbb{Z}$ に対し,

$$B = \max\{|b_1|, \dots, |b_n|\},$$

$$B'' = \max\{1, \max\{|b_j| \log A_j / \log A_n \mid 1 \leq j \leq n\}\}$$

とおく. このとき $\log |\alpha_1^{b_1} \cdots \alpha_n^{b_n} - 1|$

$$> -3 \cdot 30^{n+4} (n+1)^{5.5} D^{n+2} \times \log(eD) \log A_1 \cdots \log A_n \log(enB) \quad (6)$$

が成り立つ. 特に $n \geq 2, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ のとき

$$\log |\alpha_1^{b_1} \cdots \alpha_n^{b_n} - 1| > -2 \cdot 30^{n+3} n^{4.5} D^{n+2} \times \log(eD) \log A_1 \cdots \log A_n \log(eB). \quad (7)$$

6. 今後の課題

線形回帰数列の一般項が累乗和で表示できることから, 線形回帰数列の考察に対数一次形式を応用したい.

7. 参考文献

- [1] Y. Bugeaud, *Linear Forms in Logarithms and Applications*, European Math. Society, 2018.
- [2] T. N. Shorey, and R. Tijdeman, *Exponential Diophantine equations*, Cambridge Tracts in Math. **87**, Cambridge Univ. Press, 1986.
- [3] Wm. J. LeVeque, *On the Equation $a^x - b^y = 1$* , American J. of Math. **74** (2) (1952), 325–331.
- [4] P. Mihăilescu, *Primary cyclotomic units and a proof of Catalan's conjecture*, J. Reine Angew. Math. **572**, (2004), 167–195.
- [5] W. M. Schmidt, *Diophantine Approximation*, Lecture Notes in Math. **785**, Springer, 1980.