P-7

辺着色完全多部グラフにおける PC ハミルトンパスと PC 全域木

PC Hamilton path and PC spanning tree in an edge-colored complete multipartite graph

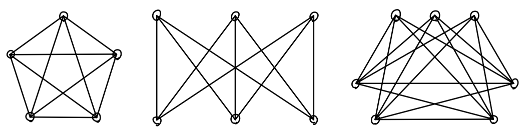
○岩崎祐也 [1], 善本潔 [2]
*Yuya Iwazaki[1], Kiyoshi Yoshimoto[2]

Abstract: There are conjectures characterizing complete bipartite graphs with a PC Hamiltonian path and complete multipartite graphs with a PC spanning tree, namely that they have a PC 1-path-cycle factor and a PC 1-tree-cycle factor, respectively. We found counterexamples to these conjectures, while showing that the statements hold true under stronger assumptions.

1. 辺着色完全多部グラフ

グラフ G と集合 S に対して，写像 $c\colon E(G) \to S$ を G の**辺着色**と呼び，グラフ G と辺着色 c の組 (G, c) を**辺着色グラフ**と呼ぶ．また，$|S| = k$ のとき，c を ***k* 辺着色**と呼ぶ．さらに，辺着色グラフ (G, c) に対して，隣接する任意の 2 辺が異なる色を持つとき，c を**辺彩色**と呼び，(G, c) は **PC**（Properly Colored）であるという．また，辺着色グラフ H に対して，H が PC であるとき PC H と表す．

単純グラフの任意の 2 頂点が隣接するとき，その単純グラフを**完全グラフ**と呼び，n 頂点から成る完全グラフを K_n と表す．完全グラフは次のように拡張できる．単純グラフ $G = (V, E)$ において，頂点集合 $V(G)$ が p 個の空ではない互いに素な頂点部分集合 $X_1, \cdots X_p$ に分割され，$V = X_1 \cup \cdots \cup X_p$ を満たし，各頂点部分集合内には辺が存在せず，異なる頂点部分集合 X_i，X_j に対して，X_i のすべての頂点と X_j のすべての頂点が隣接するとする．このとき，G を**完全多部グラフ**または**完全 *p* 部グラフ**と呼び，$K_{|X_1|,\cdots,|X_p|}$ と表す．また，G の頂点部分集合が $|X_1| = |X_2| = \cdots = |X_p|$ のとき，**balanced** な完全 p 部グラフと呼ぶ．



左から完全グラフ K_5, balanced な完全 2 部グラフ $K_{3,3}$, 完全 3 部グラフ $K_{2,2,3}$ である．

2. PC ハミルトンパス

最初に，PC ハミルトンパスを持つ辺着色完全多部グラフの特徴付けを紹介する．ハミルトンパスとは，グラフのすべての頂点を通るパスである．

定義 1 辺着色グラフに対して，*1* つの *PC* パスと複数の *PC* サイクルから成る互いに点素な全域部分グラフを ***PC 1-path-cycle factor*** と呼ぶ．ただし，*PC* サイクルは *0* 個でも良い．

Feng，Giesen らは [1] で PC ハミルトンパスを持つ辺着色完全グラフの特徴付けをした．

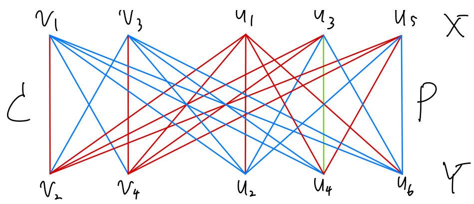
定理 2 ([1]) 辺着色完全グラフ (K_n, c) が *PC* ハミルトンパスを持つための必要十分条件は，この (K_n, c) が *PC 1-path-cycle factor* を持つことである．

しかし，一般の完全多部グラフの特徴付けは未解決であり，Cheng，Kano，Wang は次の PC ハミルトンパスを持つ完全 2 部グラフの特徴付けを予想した．

予想 3 ([2]) *balanced* な辺着色完全 *2* 部グラフ $(K_{n,n}, c)$ が *PC* ハミルトンパスを持つための必要十分条件は，この $(K_{n,n}, c)$ が *PC 1-path-cycle factor* を持つことである．

予想 3 に反例を得られたので紹介する．

定理 4 (Iwazaki and Yoshimoto) *PC 1-path-cycle factor* を持つが，*PC* ハミルトンパスを持たない *balanced* な *3* 辺着色完全 *2* 部グラフが存在する．



更にこのグラフをもとにして反例の無限族を構成できる．また，予想 3 に条件を付け加えることで主張が成り立つことを示した．辺着色グラフに対して，色 i を持つ辺によって誘導される部分グラフを $\langle E^i \rangle$ で表す．

定理 5 *balanced* な *2* 辺着色完全 *2* 部グラフ $(K_{n,n}, c)$ が *PC* ハミルトンパスを持つための必要十分条件は，この $(K_{n,n}, c)$ が *PC 1-path-cycle factor* を持つことである．

定理 6 (Iwazaki and Yoshimoto) (G, c) を任意の $\langle E^i \rangle$ に対して，その成分が *star* である辺着色完全多部グラフとする．このとき，(G, c) が *PC* ハミルトンパスを持つための必要十分条件は，この (G, c) が *PC 1-path-cycle factor* を持つことである．

1: 日大理工・院 (前)・数学　2: 日大理工・教員・数学

定理 6 を証明する際に Gutin の有向グラフの定理を使用したので紹介する．グラフの辺に向きを与えたグラフを有向グラフと呼び，完全多部グラフの辺に向きを与えたグラフを**多部トーナメント**と呼ぶ．有向 1-path-cycle factor とは，1 つの有向パスと複数の有向サイクルから成る互いに点素な全域部分グラフである．ただし，有向サイクルは 0 個でも良い．

定理 7 ([3]) 多部トーナメントが有向ハミルトンパスを持つための必要十分条件は，この多部トーナメントが有向 *1-path-cycle factor* を持つことである．

3. PC 全域木

PC ハミルトンパスの一般化として PC 全域木を考えるのは自然である．全域木とは，グラフのすべての頂点を含む木である．PC 全域木を持つ辺着色完全多部グラフの特徴付けを紹介する．

定義 8 辺着色グラフに対して，*1* つの *PC* 木と複数の *PC* サイクルから成る互いに点素な全域部分グラフを ***PC 1-tree-cycle factor*** と呼ぶ．ただし，*PC* サイクルは *0* 個でも良い．

Borozan らが [4] で PC 全域木を持つ辺着色完全グラフの特徴付けをして，Cheng， Kano， Wang が [2] で PC 全域木を持つ辺着色完全 2 部グラフの特徴付けをした．

定理 9 ([4]) 辺着色完全グラフ (K_n, c) が *PC* 全域木を持つための必要十分条件は，この (K_n, c) が *PC 1-tree-cycle factor* を持つことである．

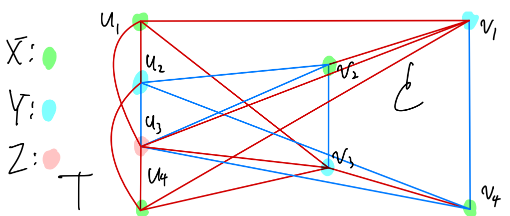
定理 10 ([2]) 辺着色完全 2 部グラフ $(K_{m,n}, c)$ が *PC* 全域木を持つための必要十分条件は，この $(K_{m,n}, c)$ が *PC 1-tree-cycle factor* を持つことである．

しかし，一般の場合である PC 全域木を持つ辺着色完全多部グラフの特徴付けは未解決である．

予想 11 辺着色完全多部グラフが *PC* 全域木を持つための必要十分条件は，この辺着色完全多部グラフが *PC 1-tree-cycle factor* を持つことである．

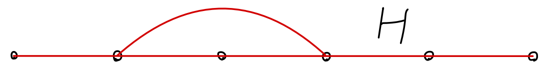
予想 11 に反例を得られたので紹介する．

定理 12 (Iwazaki and Yoshimoto) *PC 1-tree-cycle factor* を持つが，*PC* 全域木を持たない *2* 辺着色完全 *3* 部グラフが存在する．



定理 4 と同様に上のグラフをもとに反例の無限族を構成できる．また，予想 11 に条件を付け加えることで主張が成り立つことを示した．辺着色グラフの単色部分グラフ H を *mono-H* と表す．

定理 13 (Iwazaki and Yoshimoto) (G, c) を次の *mono-H* を持たない辺着色完全多部グラフとする．このとき，(G, c) が *PC* 全域木を持つための必要十分条件は，この (G, c) が *PC 1-tree-cycle factor* を持つことである．



定理 13 の系として，定理 9 と定理 10 が得られる．特に，*mono-H* は K_3 を含むので，定理 13 から定理 10 が直ちに得られることが分かる．

4. 今後の課題

PC ハミルトンパスから PC 全域木への一般化として，以下の予想の方がより一般的である．PC ハミルトンパスの主張では，主に PC パスから PC ハミルトンパスを構成しており，どちらも端点の数は等しい．そのため，PC 1-tree-cycle factor の PC 木の端点数と PC 全域木の端点数が一致することがより一般的と考えられる．

予想 14 (Iwazaki and Yoshimoto) (G, c) を任意の $\langle E^i \rangle$ に対して，その成分が *star* である辺着色完全多部グラフとする．このとき，(G, c) が端点数 t の *PC* 全域木を持つための必要十分条件は，この (G, c) がある *PC 1-tree-cycle factor* $T \cup C_1 \cup \cdots \cup C_k$ を持ち，その T の端点数が t である．

5. 参考文献

[1] J. Feng, H.-E. Giesen, Y. Guo, G. Gutin, T. Jensen, and A. Rafiey. Characterization of edge-colored complete graphs with properly colored Hamilton paths. J. Graph Theory, 53 (4) : 333-346, 2006.

[2] Y. Cheng, M. Kano, G. Wang, Properly colored spanning trees in edge-colored graphs, Discrete Mathematics 343 (2020) 111629

[3] G. Gutin. Characterization of complete n-partite digraphs that have a Hamilto- nian path. Kibernetika (Kiev), no. 1:107-108, 136, 1988.

[4] V. Borozan, W. Fernandez de La Vega, Y. Manoussakis, C. Martinhon, R. Muthu, H. P. Pham, R. Saad, Maximum colored trees in edge-colored graphs, European J. Combin. 80 (2019) 296-310.