P-9

平面グラフの 3 彩色イデアルに対するグレブナー基底計算における初期 S-ペア削減
Reducing initial S-Pairs in Gröbner Basis Computation for the 3-Coloring Ideal of Planar Graphs

○宇野嘉純 [1], 平石秀史 [2]
*Yoshizumi Uno[1], Hidefumi Hiraishi[2]

Abstract: This study investigates the assignment of variables to vertices aimed at reducing nontrivial S-pairs in Gröbner basis computation for the 3-coloring ideals of planar graphs. We employ the Smallest-First Ordering to bound the worst-case number of nontrivial S-pairs from $O(n^2)$ to $O(n)$ in planar graphs.

1. はじめに

いくつかの計算困難問題は，入力を単純な構造に制限すると多項式時間で解ける場合がある．一方，グラフ 3 彩色問題は最大次数 4 以下の平面グラフに限定しても NP 完全であり [1],（P $\neq$ NP の仮定の下では）多項式時間アルゴリズムは望めない．

本研究では，グラフ 3 彩色問題の代数的な定式化に基づき，特に平面グラフの場合について，頂点への変数の割り当て方に着目した有効な手法を検討する．定式化の方法は Bayer の定式化 [2] を用いる．

2. グラフ 3 彩色問題の代数的定式化

$G=(V,E)$ をグラフとする．Bayer の定式化では，各頂点 $v_i \in V$ に色を表す変数 $x_i \in \{1,\omega,\omega^2\}$ $(\omega = e^{\frac{2\pi}{3}i} \in \mathbb{C})$ を割り当てる．$n=|V|$ とし，$\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$ 上で

$$f_i := x_i^3-1 \ (v_i \in V),\ g_{jk} := x_j^2+x_jx_k+x_k^2 \ (\{v_j,v_k\} \in E)$$

を定める．このとき，$f_i=0$ は $x_i \in \{1,\omega,\omega^2\}$ に同値であり，さらに $f_j=f_k=0$ の下で $g_{jk}=0$ は $x_j \neq x_k$ に同値である．f_i, g_{jk} から生成されるイデアル

$$I_G = \langle f_i, g_{jk} \mid v_i \in V, \{v_j,v_k\} \in E \,\rangle$$

をグラフ G の 3 彩色イデアル と呼ぶ．

多項式からなる連立方程式 $h_1=h_2=\cdots=h_s=0$ が解を持たないことは，下の定理より $1 \in \langle h_1,\ldots,h_s\rangle$ と同値である．

定理 1 (弱形の零点定理 [3])**.** k を代数的閉体とし，$I \subseteq k[x_1,\ldots,x_n]$ を $\mathbf{V}(I)=\emptyset$ を満たすイデアルとする．このとき $I=k[x_1,\ldots,x_n]$ である．

したがって，解を持つかは $\langle h_1,\ldots,h_s\rangle$ の被約グレブナー基底が $\{1\}$ となるかを調べれば分かる．以下では，単項式順序は $x_1>x_2>\cdots>x_n$ による lex 順序を使う．

グレブナー基底計算におけるボトルネックは，S 多項式の余り $\overline{S(f,g)}^F$ の計算である．ブッフバーガーのアルゴリズムでは，0 でない余りが得られる度にそれを基底に追加し，新しい元と既存の元の全組合せに対して S 多項式の余りを計算するため，候補ペア（S-ペア）の数が膨大になる．したがって，この S-ペアの数を削減することが計算の効率化の鍵となる．$\overline{S(f,g)}^F$ の計算を省略できる条件はいくつかあるが，代表的なものに「$S(f,g)$ が標準表現を持つ場合」,「f,g の先頭単項式が互いに素である場合」などがある（[3] の第 2 章 §9, §10 に詳しい）．

3. 変数の割り当てによる影響

各頂点への変数の割り当て方は，全体の計算量に大きく影響しうる．ここではグラフの小さな局所構造に着目し，効果的な割り当ての方針を検討する．

3 頂点のパスグラフ $G_1: v_1-v_2-v_3$ と $G_2: v_2-v_1-v_3$ を考える．G_1 からは $F_1=\{f_1,f_2,f_3,g_{12},g_{23}\}$ が得られる．先頭単項式が互いに素でないペアは $(f_1,g_{12}),(f_2,g_{23})$ の 2 つあるが，その S 多項式はどちらも標準表現をもつため，F_1 は初めからグレブナー基底になっている．

一方，G_2 が作る $F_2=\{f_1,f_2,f_3,g_{12},g_{13}\}$ からは，すぐにはグレブナー基底は得られない．これは，$S(g_{12},g_{13}) = x_1x_2-x_1x_3+x_2^2-x_3^2$ を F_2 で割った余りが 0 とならないからである．より一般に $i<j<k$ のとき，$\mathrm{LT}(S(g_{ij},g_{ik})) = x_ix_j$ となり，これはどの $\mathrm{LT}(f)$ や $\mathrm{LT}(g)$ でも割り切れない．したがって 0 でない余りが発生し，S-ペアの増加につながる．

G_2 におけるこの現象の原因は，次数 2 の頂点に最も順位の高い変数 x_1 を割り当てた点にあり，それにより (g_{12},g_{13}) という S-ペアが発生した．星グラフなどでは次数の大きい頂点に順位の高い変数を割り当てると，このペアの数が $O(n^2)$ になる．逆に言えば，次数の小さい頂点に順位の高い変数を優先的に割り当てると，(g_{ij},g_{ik}) 型の S-ペアの発生を抑制できる．

4. Smallest-First Ordering による変数の割り当て

前節の考察から，次数の小さい頂点から優先して選ぶような順に基づけば，(g_{ij},g_{ik}) 型の S-ペアの数を削減できると考えられる．本節では，次で定義する順により各頂点に変数を割り当てる．

1: 日大理工・院 (前)・数学　2: 日大理工・教員・数学

定義 2 (Smallest-First Ordering)**.** グラフ G から，その時点での次数最小の頂点を削除する操作を G が空になるまで繰り返し，頂点を削除した順に $v_1, v_2, \ldots, v_n$ とする．この順を Smallest-First Ordering と呼ぶ.

Smallest-First Ordering（以下，SFO）は，Smallest-Last Ordering（以下，SLO）の逆順であり，$O(|V|+|E|)$ で構成できる [4]．この順を用いることで，平面グラフの場合に (g_{ij}, g_{ik}) 型の S-ペアの数に $O(n)$ の上界を与えることができる.

$G=(V,E)$ を単純平面グラフとする．$n=|V|, m=|E|$ とすると，$n \geq 3$ のとき $m \leq 3n-6$ であり，G は次数 5 以下の頂点を持つことが知られている（[5] など）.

命題 3. G を平面グラフとし，SFO によって頂点を $v_1, v_2, \ldots, v_n$ とする．このとき，(g_{ij}, g_{ik}) 型の S-ペアの個数 N_{pairs} は $N_{\text{pairs}} \leq 2m \leq 6n-12$ を満たす.

証明. 先頭単項式が互いに素な組（(g_{ij}, g_{jk}) など）を除外すると，残るのは固定した i に対する g_{ij} $(i<j)$ 同士のペアのみである．削除時点での次数を d_i とおくと，g_{ij} は d_i 本あるのでペアの数は $\binom{d_i}{2}$．よって

$$N_{\text{pairs}} = \sum_i \binom{d_i}{2} = \sum_i \frac{d_i(d_i-1)}{2}.$$

G は平面グラフだから常に $d_i \leq 5$．したがって $d_i - 1 \leq 4$ より $\binom{d_i}{2} \leq 2d_i$．ゆえに

$$N_{\text{pairs}} \leq \sum_i 2d_i = 2m \leq 6n-12. \qquad \square$$

[4] によると，SLO は $\max_i \deg(v_i \mid G_i) = \hat{\delta}(G)$ を達成する．$\hat{\delta}(G)$ は degeneracy と呼ばれるグラフ不変量である．$k := \hat{\delta}(G)$ とおけば，SFO では各削除時点の次数 $d_i \leq k$ が常に成り立つ．よって

$$N_{\text{pairs}} = \sum_i \binom{d_i}{2} \leq \sum_i \binom{k}{2} = \frac{k(k-1)}{2}\, n$$

となり，k が定数で抑えられるグラフに対しては $O(n)$ の上界を得ることができる.

5. 全体の計算量への影響

SFO による割り当てがグレブナー基底計算全体に与える影響を調べるために，実験を行った.

10 頂点 20 辺からなる平面グラフをランダムに 10 個作成し，$v_1, v_2, \ldots, v_n$ を A: ランダムな順，B: 次数の大きい順，C:SFO による順によって定め，実際に 3 彩色イデアルのグレブナー基底計算を行った．単項式順序は，一般に計算が高速な grevlex 順序を用いた.（ここまでの議論は主要な単項式順序（lex,grlex,grevlex）のいずれでも成り立つ.）

	g_{ij}-g_{ik} ペア	総ペア	処理ペア	係数長
A	24.9	2716.4	764.0	14.8
B	34.8	4239.8	1425.3	15.7
C	14.3	1561.5	326.9	5.2

「総ペア」はアルゴリズムが候補として生成した全ペア数,「処理ペア」はそのうち先頭単項式が互いに素でなく実際に $\overline{S(f,g)}^F$ を計算した数である.「係数長」は計算途中に現れた多項式の係数の高さの最大値のビット長.（有理数 $\frac{b}{a}$ $(a, b \in \mathbb{Z}$ は互いに素で $a \neq 0)$ の高さとは，$\max\{|a|,|b|\}$ のこと.）各値はいずれも 10 ケースの平均である.

期待通り，SFO による順 (C) では初期の (g_{ij}, g_{ik}) 型の S-ペア数が削減され，処理ペア数や係数長を含む全体の計算量が抑制された.

6. 結論と今後の展望

Smallest-First Ordering に基づく変数の割り当てが，平面グラフの場合に (g_{ij}, g_{ik}) 型の S-ペア総数に $O(n)$ の上界を与えることを示し，実験でも計算量が抑制されることを確認した.

今後は，他のグラフ不変量や S-ペア判定基準に基づく前処理の設計などを検討する．さらに，独立集合問題や頂点被覆問題などの離散最適化問題の代数的定式化に対しても，同様の割り当て戦略の有効性を検証する.

7. 参考文献

[1] M. R. Garey, D. S. Johnson and L. Stockmeyer, “Some simplified NP-complete problems,” in Proceedings of the Sixth Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC ’74), pp. 47–63, ACM, 1974.

[2] D. A. Bayer, “The Division Algorithm and the Hilbert Scheme”, Ph.D. Thesis, Harvard University, 1982.

[3] D. Cox, J. Little, D. O’Shea 著, 大杉英史・土谷昭善 訳,『グレブナー基底と代数多様体入門 上 ーイデアル・多様体・アルゴリズムー（原書 4 版）』, 丸善出版, 2023.

[4] D. W. Matula and L. L. Beck, “Smallest-last ordering and clustering and graph coloring algorithms”, Journal of the ACM, 30(3):417–427, 1983.

[5] R.J. ウィルソン 著，西関隆夫・西関裕子 共訳,『グラフ理論入門 （原書第 4 版）』, 近代科学社，2001.